Anales Científicos, 78 (2): 112-116 (2017)
ISSN 0255-0407 (Versión impresa)
ISSN 2519-7398 (Versión electrónica)
DOI: http://dx.doi.org/10.21704/ac.v78i2.1046

Presentado:23/03/2017
Aceptado: 11/05/2017

Teorema de Swan-Serre $k\,(x)$: ISomorfo a $k_0\,(C\,(x))$

The Swan-Serre Theorem: $k\,(x)$: Isomorphic to $k_0\,(C\,(x))$

Ana María Zela Apaza[1]

Resumen

Se presenta un estudio algebraico de la $K-$teoría formulada con módulos proyectivos finitamente generados. La importancia de este trabajo se refleja en el Teorema de Swan-Serre que establece el isomorfismo entre la $K-$teoría topológica del espacio topológico X y la $K-$teoría algebraica del anillo $C(X)$ es decir; si X es un espacio topológico compacto y de Hausdorff y $C(X)$ es el anillo de las funciones continuas sobre X con valores en $\mathbb{C}$, entonces $K(X) \cong k_0$ $(C\,(x))$. Finalmente llegaremos a concluir que esta teoría se generaliza para álgebras de Banach y álgebras C^*.

Palabras claves: Espacios topológicos; fibrados vectoriales; grupo de Grotendieck; isomorfismo de grupos abelianos; módulos proyectivos; Swan-Serre.

Abstract

It is an algebraic study of the formulated K-theory with finitely generated projective modules. The importance of this work is reflected in the Serre-Swan theorem which establishes the isomorphism between the K-theory space topology X and the K algebraic ring $C(X)$-theory, i.e. If X is compact and Hausdorff topology and $C(X)$ is the ring of continuous functions on X with values in $\mathbb{C}$, then $K(X) \cong k_0\,(C(x))$. Finally arrive to the conclusion that this theory is generalized for you algebras of Banach and algebras C^*.

Keywords: Topology spaces; Vector bundles; rothendieck groups; isomorphisme of groups abelians; projective modules. Swans-Serre.

1. Introducción

En el trabajo de investigación "$K(X)$ el Grupo de Grothendienck del Semigrupo Abeliano $V(X)$" (Zela, 2014) se presentó un estudio topológico de la K-teoría donde el grupo de Grothendieck $K(X)$ se define como la diferencia de clases de equivalencia de fibrados vectoriales (Hatcher, 1998). En este trabajo describiremos una manera de trasladar la K teoría topológica descrita en el grupo de Grothendieck $K(X)$ a la K-teoría algebraica que está formulada como la diferencia de clases de equivalencia de R-módulos proyectivos finitamente generados, donde R es un anillo unitario.

El Teorema de Swan-Serre garantiza el isomorfismo entre $-$teoría topológica del espacio topológico X y la K-teoría algebraica del anillo $C(X)$ para ser más precisos este teorema establece: Si X es un espacio topológico compacto y de Hausdorff y $C(X)$ es el anillo de las funciones continuas sobre X con valores en $\mathbb{C}$, entonces $K(X)$ es isomorfo a K_0 $(C(X))$ es decir la K-teoría topológica del espacio topológico C es isomorfa a la K-teoría algebraica del anillo $C(X)$.

El presente trabajo está organizado como sigue: en Materiales y métodos hay dos secciones y están están dedicadas a dar las definiciones y ejemplos básicos de fibrados Vectoriales y módulos respectivamente.

En los Resultados y Discusión nos centraremos en el estudio del algebraico de la K-teoría algebraica y demostraremos el teorema de Swan-Serre.

2. Materiales y métodos

Fibrados Vectoriales

Informalmente un fibrado vectorial sobre un espacio base X (el cual usualmente es tomado como un espacio de Hausdorff compacto) es una construcción geom´etrica donde a cada punto de un espacio topol´ogico X adherimos un espacio vectorial n- dimensional, dándole al espacio así obtenido una estructura topológica local que en el contexto es como producto cartesiano de cierto abierto U del espacio X por $\mathbb{K}^n$donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 1. Sea X un espacio topológico llamado *espacio base*. Un fibrado vectorial sobre es un espacio topológico llamado *espacio total* junto con:

a) una aplicación continua y sobreyectiva $p\colon E\to X,$ denominada *proyección*, tal que para todo $x \in X$ los conjuntos $E_x=p^{-1}(x)$ llamados fi*bras*, tienen estructura de espacio vectorial de dimensión finita.

b) una topología (Atiyah, 1964) sobre cada E_x, la cual es compatible con la de E es decir podemos inducir una topología sobre cada conociendo la topología sobre E.

c) el fibrado E satisface la condición de trivialidad local, para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x de x, donde $E|_{U_X}$=P$^{-1}(Ux)$ es isomorfo al producto cartesiano $U_x * \mathbb{K}^n$; es decir, existen homeomorfismos:

$$hx\colon p^{-1}\,(Ux) \to Ux\times \mathbb{K}^n,$$

[1]Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Agraria La Molina, Lima, Perú. Email: azela@lamolina.edu.pe

donde hx es llamado *trivialización local* del fibrado vectorial E y al restringirnos a p^{-1} (y) en $\{y\}*\mathbb{K}^n$, hx debe ser un isomorfismo de espacios vectoriales para cada $y \in Ux$. La inversa de hx es llamada parametrización.

De acuerdo con la Definición 1, los fibrados vectoriales son la unión de fibras $p^{-1}(x)$ para cada $x \in X$ parametrizadas por X y pegadas juntos por una topología del espacio E. En general nos referimos a un fibrado vectorial como una (E,p,X) terna que llamaremos simplemente E, siempre y cuando p y X estén sobreentendidos.

Ejemplo 1. (El Fibrado Inducido ó Pullback) Para su construcción tomaremos un fibrado vectorial (E, p, X) y una aplicación continua $f: X\to Y$ los fibrados vectoriales sobre X son inducidos por fibrados vectoriales sobre Y através de una construcción **Pullback**. Definamos el fibrado vectorial **Pullback ´o Inducido** como: $f^*(E) = \{(x, e) \in X \times E; f(Y) = p(e)\}$ con proyección $f^*(p): f^*(E) = X$ y fibras:

$$\begin{aligned} f^*(p^{-1}(\{x\}) &= f^*(Ex) \\ &= (\{x\} \text{ X } p^{-1}(f(x)) \\ &= (\{x\} \text{ X } E_f(x)) \end{aligned}$$

Siendo $f^*(p)^{-1}=\{(x, e); e\ E\}$un espacio vectorial y $f^*(E)$ satisface la condición de trivialidad local cuando E lo es. En efecto: Sea (U,h) un sistema de coordenadas de E que satisfice $h: U_1 \times \mathbb{K}^n \to p^{-1}(U)$ si consideramos $U_1 = f^1(U)$ tenemos:

$$h{:}U_1 \text{ X}\mathbb{K}^n \to f^*(p)^{-1}(U_1)$$
$$(y, x) \to (y, h(f(y), x))$$

es un homeomorfismo. Por lo tanto vemos que $(f^*(E), f^*(p), X$ es un fibrado vectorial sobre X.

Un ejemplo trivial que podemos mencionar es el siguiente. Sí ***f*** es la función inclusión de subespacios $Y \subset X$ entonces $f^*(E) \cong p^{-1}(y)$ así la restricción sobre el subespacio es un caso particular de Pullback.

Módulos

Definición 2 (Módulos). Un módulo sobre un anillo R un $R-$módulo es un grupo abeliano aditivo M, dotado de una multiplicaciÓn externa $R \text{ X } M \to M$ con la cual se satisfacen: para cualquier $r,s \in R$ y $x,y \in M$ satisface las siguientes propiedades:

1. $(r + s)x = rx + sx$.
2. $r(x + y) = rx + ry$.
3. $r(sx) = (rs)x$.
4. 1.x= x.

Ejemplo 2. De manera natural para cualquier M un grupo abeliano entonces M es unmódulo.

Lema 1. *Sea R un anillo, el producto cartesiano $R^n = R \times R \times \ldots \times R$ es un módulo con la multiplicación R de los elementos de coordenada a coordenada.*

A un módulo construido como en el caso del Lema 1 se le denomina **módulo libre de rango *n*.** Como es usual podemos construir nuevos módulos a partir de los módulos conocidos. Si M y N son $R-$módulos formemos el R-módulo $M\oplus N$ con suma y multiplicaci´on coordenada a coordenada.

Lema 2. *Un $R-$módulo M es proyectivo si existe un R-modulo Q tal que $M\oplus Q \cong R^n$.*

Lema 3. *Los módulos proyectivos* finitamente generados *sobre $C(X)$ son sumandos directos de $C(X)^n$ para algún n.*

Prueba.- Esto es inmediato del Lema 2.

Notemos que todo módulo libre es proyectivo puesto que podemos considererar $Q= 0$ el módulo trivial.

Definición 3. (Módulos finitamente generados). Un R-módulo M es finitamente generado si existe un R-módulo libre R^n y un homomorfismo sobreyectivo $\phi{:}R^n\to M$.

Ejemplo 3. Todo espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ es un $R-$modulo finitamente generado por la base.

Teorema 1. *Sea $\underline{R}$ un anillo unitario conmutativo y sea M, N módulos libres de dimensión m, n respectivamente, que poseen bases fijas (ai)m y (bi)n. Entonces existe un isomorfismo*

$$\Phi\text{: End}(M,N) \to Mn(R)$$
$$f\to\Phi(f)=matriz[\text{f},(b_i)_n, (a_i)m]$$

Prueba.- Este teorema está justificado por ser M y N espacios vectoriales de dimensiones m y n respectivamente. Luego con base en la teoría de álgebra lineal.

Lema 4. *El anillo de endomorfismos del módulo libre $C(X)^n$ es isomorfo a $M_n(C(X))$ el anillo de las matrices cuadradas de tamaño n con entradas en $C(X)$. Más aún, $M_n(C(X))$ es isomorfo a $C(X,M_n(\mathbb{C}))$ el anillo de las funciones continuas* de *X* a *$M_n(\mathbb{C})$. El isomorfismo está dado por*:

$$\psi{:}M_n(C(X))\to C(X,Mn(\mathbb{C}))$$
$$(f_{ij})\to F$$

con F (x) = $(f_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *donde fij* $\in C(X)$ *para todo* $1\leq i\leq n$ y $1\leq j\leq n$.

Lema 5. *Existe una biyección entre los sumandos directos de $C(X)^n$ y los elementos idempotentes en $End(C(X)^n)$ que asigna a cada sumando directo la proyección sobre ese sumando y viceversa a cada idempotente el módulo imagen.*

3. Resultados y Discusión

K-teoría Algebraica

En ésta sección describiremos una manera de trasladar la *K*-teorÍa topológica a la *k*-teoría algebraíca.

En el trabajo de investigación Fibrados Vectoriales y el Semigrupo $V(X)$ (Zela, 2006), definimos $\Gamma(E)$como el conjunto de las secciones sobre X. Definiremos la suma de dos secciones s_1 y s_2 de la manera obvia, usando que para cada $x, s_1(x)$ y $s_{12}(x)$ est´an en Ex.

Lema 6. *El conjunto* Γ(E)*es un grupo abeliano.*

Prueba.- Se verifica que el elemento neutro es la sección nula $\bar{s}$ y el inverso aditivo de s es $-s$ definido por $-s(x)=-(s(x))$, que pertenece a Ex.

Proposición 1. *Sean E y F fibrados vectoriales sobre el mismo espacio base X . Entonces* $\Gamma(E\oplus F)\rightarrow\Gamma(E)\oplus\Gamma(F)$.

Prueba.- El isomorfismo está dado por

$$\Psi: \Gamma(E\oplus F)\rightarrow\Gamma(E)\oplus\Gamma(F)$$
$$s \rightarrow (s_1,s_2)$$

donde $s_1:X\rightarrow E$ y $s_2:X\rightarrow F$ con $s(x) = (s_1(x),s_2(x)) \in Ex\times Fx$, para todo $x \in X$.

Observación 1. El conjunto $C(X) =\{f: X \rightarrow \mathbb{C}\}$formado por las funciones continuas sobre X con valores en los números complejos es un anillo conmutativo y tiene como unidad la función constante 1.

En esta sección el anillo $C(X)$ resultará escencial para relacionar la categoría de los fibrados vectoriales y la categoría de los módulos proyectivos finitamente generados.

Proposición 2. *Sea E un fibrado vectorial sobre un espacio compacto X. El grupo abeliano* $\Gamma(E)$ *de las secciones de E tiene una estructura natural de* $C(X)$*-módulo.*

Prueba.- Basta definir la multiplicación por una función continua $(fs)(x)=f(x)s(x)$ la cual pertenece a Ex.

Es natural preguntarnos si dos fibrados vectoriales isomorfos guardan alguna relación entre sus $C(X)$- módulos respectivos. La respuesta la da el siguiente Lema.

Lema 7. *Sean E y F fibrados vectoriales sobre el mismo espacio base X y* $\phi:E \rightarrow F$ *un morfismo de fibrados vectoriales. Entonces el morfismo* ϕ *induce un morfismo de* $C(X)$*-módulos de secciones de E y F por intermedio de* $\psi: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$

$$s \rightarrow \phi o s$$

Prueba.- Notemos que $\psi(f.s)(x)$ es por definición $\phi(f(x).s(x))= f(x).\phi(s(x))=(f\psi(s))(x)$.

Observación 2. El Lema 7 convierte a Γ en un funtor de la categoría de fibrados vectoriales FV sobre X, a la categoía MP de $C(X)$-módulos.

Los fibrados vectoriales triviales εn juegan un rol importante pues $\Gamma(\varepsilon n)$ es un módulo libre. Más aún, si el espacio base X es compacto, entonces $\Gamma(E)$es un módulo proyectivo finitamente generado para todo fibrado vectorial E sobre X. Pasemos a mostrar estas aseveraciones.

Proposición 3. *Si* εn *es un fibrado vectorial trivial n-dimensional. Entonces* $\Gamma(\varepsilon n)$ *es isomorfo a* $C(X)^n$, *el cual es un módulo libre.*

Prueba.- Se tiene que $\Gamma(\varepsilon n)=\{s:X\rightarrow X\times\mathbb{C}^n, p(s(x))=x\}$ donde $s(x)=(x,v(x))$ con $v(x)= (v_1(x),v_2(x),...,vn(x))$ en $\mathbb{C}^n$, entonces $\Gamma(\varepsilon n)\cong\{v; X\rightarrow \mathbb{C}^n$, continua$\}\cong\{(v_1, v_2, \ldots, v_n), v_j : X\rightarrow$ C, continua$\} =C(X)^n$.

Corolario 1. *Sea E un fibrado vectorial sobre un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Entonces* $\Gamma(E)$ *es un módulo proyectivo finitamente generado.*

Prueba.- Haremos uso del teorema de Swan (Zela, 2006). Por la compacidad de X existe un fibrado vectorial F tal que $E\oplus F=\varepsilon n$, fibrado vectorial trivial de dimensión n. Por la Proposición 3 tenemos $\Gamma(E\oplus F)=C(X)^n$. Esto combinado con la Proposición 1 nos conduce a

$$C(X)^n\cong \Gamma(E\oplus F)\cong \Gamma(E)\oplus\Gamma(F)$$

Entonces $\Gamma(E)$ es un módulo proyectivo finitamente generado por ser sumando directo del módulo libre finitamente generado $C(X)^n$.

Hasta aquí constatamos que si tenemos un fibrado vectorial E, el conjunto de sus secciones $\Gamma(E)$ es un módulo proyectivo finitamente generado sobre $C(X)$.

Pensemos un momento en el caso contrario. ¿Cualquier módulo proyectivo finitamente generado sobre $C(X)$ es el módulo de secciones de algún fibrado vectorial E?. La respuesta es afirmativa. Esto lo veremos con mayor claridad tras caracterizar los módulos proyectivos por medio de idempotentes $(e^2=e)$ en el conjunto $C(X)$ de las matrices con entradas en de tamaño arbitrario: $M\infty(C(X)) = \cup_n Mn(C(X))$.

Por el Lema 3 de la sección 2, los módulos proyectivos finitamente generados corresponden a los sumandos directos de algún $C(X)^n$. Existe una biyección entre los sumandos directos de $C(X)^n$ y los idempotentes en $C(X, Mn(\mathbb{C}))$. Si M es un sumando directo de $C(X)^n$ entonces existe un N tal que M$\oplus$N$=C(X)^n$. Consideremos $e \in End$(M$\oplus$N

), la proyección sobre M en $C(X)^n$, es un elemento del álgebra de matrices Mn $(C(X))\cong C(X,Mn(\mathbb{C}))$. Bajo esta identificación $e{:}X\to Mn(\mathbb{C})$ y $e(x)$ es un idempotente en $Mn(\mathbb{C})$. Luego podemos construir el conjunto $\Omega M=\{(x,v)\in X\times\mathbb{C}^n;\, v\in Im(e(x))\}$que es un espacio topológico con la topol´ogia heredada X de $\mathbb{C}^n$.

Proposici´on 4. *El espacio topológico* $\Omega M=\{(x,\xi)\in X\times\mathbb{C}^n;\,\xi\in Im(e(x))\}$ *es un fibrado vectorial sobre* X *con* $\pi:\Omega M\to X$ *la proyección sobre el primer factor.*

Prueba.- Notemos que la proyección π es continua. Las fibras de ΩM estan dadas por $(\Omega M)x=\{(x\}$ x $\{\xi\in\mathbb{C}^n;\xi\in Im\ (e(X))\}$. Para probar la trivialidad local cerca de tomamos

$$U=\{y;\ \|e(x)\text{-}e(y)\|<\varepsilon=(1/\|v_x\|;\text{donde } v_x=2e(x)\text{-}1\}$$

Sea y un elemento de U , ponemos $p=e(x)$ y $q=e(y)$, idempotentes en $Mn(\mathbb{C})$. El elemento $z=z_y=1/2(v_x\,v_y+1)$ es invertible en $Mn(\mathbb{C})$ puesto que $\|z_y\text{-}1\|=\|1/2(v_x\,v_y+1)\|\leq 1/2\ \|v_x\|\|v_x\text{-}v_y\|=\|v_x\|\|e(x)\text{-}e(y)\|<1$

Para esto notemos que $p=e(x)$ es la proyección sobre Ex y entonces para v en Ex tenemos que $z^{-1}(v)=z^{-1}p(w)=qz^{-1}(w)$ pertenece a $Im(q)=Im(e(y))=Ey$.

Similarmente se cumple $z(Ey)$ para está incluido en Ex. Entonces $hy{:}\pi^{-1}(y)\to X\times E_x$ es un isomorfismo de espacios vectoriales definido por $(y,w)\to(y,zy(w))$. Como z_y depende continuamente de y, se tiene que

$$h:\pi^{-1}(U)\to U\times E_x\in U\times\mathbb{C}^k$$
$$(y,w)\to(y,z_y(w))$$

es un homomorfismo de fibrados vectoriales.

Proposición 5. *Sea* $M\oplus N=\mathbb{C}^n$*y sea E la proyección sobre M. El conjunto de las secciones* $\Gamma(\Omega M)$ *es igual a M.*

Prueba.- Las secciones de ΩM tienen la forma $x\to(x,f(x))$ donde $f(x)$ pertenece a la imagen de $e(x)$. De esto tenemos

$$\Gamma(\Omega M)=\{f\in C(X,C^n);\, f(x)\in Im(e(x))\text{ para todo } x\in X\}$$
$$=\{f\in C(X)^n;\, f(x)=e(x)(f(x))\text{ para todo } x\in X\}$$
$$=\{f\in C(X)^n; f=e(f)\}=Im(e)=M.$$

Observación 3. *Aqui el morfismo e se ve como un elemento de* $End(C(X)^n)$ *y a* $e(X)$ *como idempotente en* $Mn(\mathbb{C})$..

Proposición 6. *Sean E y F fibrados vectoriales sobre X tales que* $E\oplus F=X\text{x}C^n$. *Entonces* $\Omega\Gamma(E)=E$.

Prueba.- Como $E\oplus F=X\text{x}C^n$, existe un isomorfismo $E_x\oplus F_x\cong\mathbb{C}^n$ de fibras. Tomamos la proyección $\pi x{:}\mathbb{C}^n\to E_x$ la cual pertenece a Mn $(\mathbb{C}^n)$ para cada x en X. Consideremos el morfismo de fibrados vectoriales triviales

$$\pi: X\times\mathbb{C}^n\to X\times\mathbb{C}^n=E\oplus F$$
$$(x,\xi)\to(x,\pi x(\xi))$$

donde x esta en X y $\tilde{\pi}(\xi)$ pertenece a Ex. Se tiene $Im(\pi)=E$. Por la Proposición 7, π induce un morfismo π=e entre $C(X)$-módulos $e{:}\,\Gamma(X\times\text{Cn})\to\Gamma(X\times\mathbb{C}^n)$ definido por $e(s)(x)=(\pi x\ o\ s)(x)$.. Notemos que $e\in Mn(C(X))$ es la proyección sobre $\Gamma(E)$. Bajo la identificación $Mn(C(X))_x\cong C(X,Mn(\mathbb{C}))$ se tiene que $e(x)v=\pi_x(v)$ para todo $v\in\mathbb{C}^n$ y por lo tanto $e(x)=\pi_x$. Esto conduce a

$E=\{(x,\xi);\ \xi\in Ex\}=\{(x,\xi);\ \xi\in Im(\pi x)\}=\{(x,\xi);\ \xi\in Im(e(x))\}=\Omega M.$

Lema 8. *Sea M un módulo proyectivo finitamente generado tal que* $M\cong M_1\cong M_2$ *y* $M_z\oplus N_1=C^n(X)$ *y* $M_2\oplus N_2=C^m(X)$ *con* $n\neq m$ *entonces* $\Omega M_1\cong\Omega M_2$.

Prueba.- Si $M_1\oplus N_1\ C^n(X)$ entonces $\Omega M_1\subset{}_X\ \mathbb{C}^n$ y de $M_2\oplus N_2\ C(X)^m$ se tiene $\Omega M\subset$ x $\mathbb{C}^m$ Además es isomorfo a $M_2\oplus N_2\ C(X)^m$ pues $M_1\cong M_2$. Aqui $M_1\oplus N_{1=}\ C(X)^n=M_1\oplus N_1\oplus(M_2\oplus N_2=C^{n+m}(\text{X})$

obteniendo Ω_{M1}'$\subset X\times\mathbb{C}^{n+m}$ y $M_2\oplus N_2=C(X)^m\cong=M_2\oplus N_2\oplus(M_1\oplus N_1)=C(\text{X})$ entonces $\Omega\text{M}\subset X\times C^{n+m}$. De ésto existen los isomorfismos:

$g: M_1\oplus N_1\oplus M_2\oplus N_2=C(X)^{n+m}\to M_1\oplus N_1\oplus N_2\oplus M_2=C(X)^{n+m}$

$h: M_1\oplus N_1=C(X)^n\to M_1\oplus N_1\oplus N_2\oplus M_2=C(X)^{n+m}$

$j: M_2\oplus N_2=C(X)^m\to M_1\oplus N_1\oplus N_2\oplus M_2=C(X)^{n+n}$

.

En consecuencia por los isomorfismos h y j tenemos $\Omega M_1\cong\Omega\text{'M}_1$ y $\Omega\text{M}_2\cong\Omega\text{'M}_2$ *y* Finalmente por el isomorfismo g tenemos $\Omega\text{M}_1\cong\Omega\text{'M}_2$ por lo tanto $\Omega\text{M}_1\cong\Omega\text{'M}_2$.

Por el Lema 3, Corolario 1, las Proposiciones 5, 6 y el Lema 8. El funtor induce una biyección

$$V(X)\longleftrightarrow V(C(X)).$$

Por la Proposici´on 1 ésta biyección preserva la operación adición, por lo tanto es un isomorfismo de semigrupos abelianos. La funtorialidad del grupo de Grothendieck da el resultado prometido.

Teorema 2 (Swan-Serre). *Si X es un espacio topológico compacto y de Hausdorff y* $C(X)$ *es el anillo de funciones continuas sobre X con valores complejos, entonces* $K(X)\cong K_0(C(X))$.

4. Conclusiones

En este trabajo presentamos una manera de trasladar la K-teoría topológica a una forma algebraica en base a módulos finitamente generados.

Se concluye: Si R es cualquier anillo unitario se define el semigrupo $V(R)$ como el conjunto de las clases de isomorfismos de R-módulos proyectivos finitamente generados. Al igual que en el caso topológico podemos definir la K-teoría algebraica de R como el **grupo de Grothendieck** de $V(R)$ obteniendo

$K_0(R) = \{[M] - [N]; [M],[N] \in V(R)\}$.

Con esto comienza un estudio general de los grupos en base a anillos y álgebras.

5. Bibliografía

Atiyah, M. F. 1964. *Topología Universal*, Topology 3, Suppl. 1, 3-38.

Hatcher. 1998. *Vector Bundles and K- Teoría*, 1998.

Zela. 2006. *Fibrados Vectoriales y el Semigrupo abeliano*, trabajo de investigación de la UNALM.

Zela. 2014. *El Grupo de Grothendieck del Semigrupo Abeliano*, trabajo de investigación de la UNALM, setiembre.