

Composición de simplejos de bézier mediante los blossoms y una aplicación al diseño de una curva sobre una superficie de bézier

Alessandri Canchoa Q. ¹, Juan Dueñas B. ²

Resumen

En el presente trabajo de investigación se desarrollan los fundamentos de la teoría de los blossom para simplejos de Bézier y los elementos necesarios para el manejo de los índices de los puntos de control de una superficie de Bézier y el algoritmo de de Casteljau para simplejos de Bézier mediante los blossom y como una aplicación de ella se propone una técnica para diseñar una curva sobre una superficie de Bézier.

Palabras clave:

Abstract

This research developed the foundations of the theory of the blossom are developed for simplejos de Bézier and the necessary elements for the handling of the indexes of the points of control of a surface of Bézier and the algorithm of de Casteljau for simplejos of Bézier. A very concise test of a general result of the composition of simplejos of Bézier is obtained by means of the blossom and like an application of her intends a technique to design a curve on a surface of Bézier.

Key words:

1. Introducción

El presente trabajo enfoca el problema de la composición aplicando la teoría de los Blossom. Los algoritmos para encontrar los puntos de control de la composición $(\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \circ \mathbf{g})$ de simplejos $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $\mathbf{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ a partir de los puntos de control de \mathbf{g} y \mathbf{F} tienen aplicaciones prácticas en el CAGD (Computer Aided Geometric Design). Una de las aplicaciones de la composición de funciones es la deformación de formas libres, obteniéndose otro método de modelamiento geométrico, inicialmente introducido por Sederberg y Parry [Sed 86] y Bézier [Bez78]. Algunas aplicaciones simples de la composición en CAGD son la evaluación, subdivisión y reparametrización de representaciones en forma de simplejos o producto tensorial de Bézier. La evaluación puede verse como la composición con una función constante. La reparametrización es, por definición, la composición con un cambio de variables. La subdivisión es un caso especial de reparametrización donde el cambio de variables es una función lineal. Una solución directa (aunque menos obvia) mediante la composición de funciones, es la conversión de rectángulos a triángulos (de Bézier). Otra aplicación práctica se da en la unión de dos curvas de Bézier con continuidad geométrica de orden arbitrario. Se presenta el algoritmo de de Casteljau para simplejos de Bézier. Se elaboran los fundamentos teóricos para construir un algoritmo para encontrar los puntos de control de la composición de dos simplejos de Bézier. Aplicando la teoría de los Blossom, se resuelve este problema de obtener los puntos de control de la composición $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}$ de dos simplejos de Bézier

$\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $\mathbf{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($n \leq N \leq d$) a partir de los puntos de control de \mathbf{g} y \mathbf{F} , inicialmente presentados por DeRose [DeRo 88]. En estos resultados se requiere evaluar el Blossom de un simplejo de Bézier por lo cual se presenta el respectivo algoritmo con este fin. Se da una aplicación de la composición de Simplejos de Bézier por Blossoms al diseño una curva sobre una superficie de Bézier.

2. Revisión de literatura

En este capítulo se presentan los conceptos básicos, definiciones, notaciones y algunos resultados que serán requeridos posteriormente.

1.1 Simplejos de Bézier

1.1.1 Polinomios de Bernstein y Curvas de Bézier.

Definición 1 Los Polinomios de Bernstein de grado k son definidos por

$$B_p^k(u) := \binom{k}{p} u^p (1-u)^{k-p}, \quad p = 0, 1, \dots, k, \quad u \in [0, 1],$$

(1)

donde el coeficiente multinomial

$$\binom{k}{p} := \begin{cases} \frac{k!}{(k-p)!p!} & , p \in \{0, \dots, k\} \\ 0 & , p \notin \{0, \dots, k\}. \end{cases} \quad (2)$$

Los polinomios de Bernstein tienen las siguientes propiedades

a)

$$B_p^k(u) := \begin{cases} 1 & , \text{si } p = k = 0 \\ 0 & , \text{si } p < 0 \vee p > k \\ (1-u)B_p^{k-1}(u) + uB_{p-1}^{k-1}(u) & , \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(3)

b) Partición de la unidad:

$$\sum_{p=0}^k B_p^k(u) = 1.$$

¹ Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Agraria La Molina. E-mail: canchoa@yahoo.com.

² Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Agraria La Molina. E-mail: duenas@lamolina.edu.pe.

Se cumple que cada polinomio de grado $\leq k$ puede expresarse como

$$f(u) = \sum_{p=0}^k b_p B_p^k(u), \quad (4)$$

donde las constantes b_p son llamados los coeficientes de Bernstein.

Definición 2 Una curva de Bézier de grado n en u es una curva paramétrica dada en la forma de Bernstein-Bézier

$$S(u) = \sum_{p=0}^n d_p B_p^n(u), \quad \forall u \in [0, 1]$$

donde $d_p \in \mathbb{R}^d$, ($p = 0, 1, \dots, n$) son llamados puntos de control o puntos de Bézier. El polígono cuyos vértices consecutivos son d_0, d_1, \dots, d_n es denominado polígono de Bézier.

Notaciones de índices:

Se presenta un conjunto de notaciones compactas que serán utilizadas más adelante.

Está notación introducida servirá para reducir la complejidad visual al derivar los resultados, así como para exponer las estructuras fundamentales simples.

- El conjunto de todos los multi-índices

$$\vec{i} := (i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}, \text{ será denotado por } \Pi_{0,n}.$$

- El conjunto de todos los multi-índices

$$\vec{j} := (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \text{ será denotado por } \Pi_{1,n}.$$

- La norma del multi-índice \vec{i} se denota por $|\vec{i}|$

se define como la suma de sus componentes.

Por ejemplo:

$$\vec{i} = (0, 2, 5, 1, 3), |\vec{i}| = 0 + 2 + 5 + 1 + 3 = 11.$$

- El símbolo \vec{e}_j denotará un multi-índice cuyas componentes son todos cero excepto el j -ésimo componente, que es uno. Con $\vec{0}$ se denotará un multi-índice cuyas componentes son todos cero.

- El conjunto de todos los multi-índices

$$\vec{i} := (i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{I}_{0,n}, \text{ tales que}$$

$$|\vec{i}| = i_0 + i_1 + \dots + i_n = d, \text{ será denotado por } \mathbb{I}_{0,n}^d.$$

Por ejemplo:

$$\mathbb{I}_{0,2}^3 = \{(0,0,3), (0,1,2), (0,2,1), (0,3,0), (1,0,2), (1,2,0), (1,1,1), (2,0,1), (2,1,0), (3,0,0)\}$$

- El conjunto de todos los hiper-índices

$$\mathbf{I} := (\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_m) \text{ donde } \vec{i}_1, \dots, \vec{i}_m \in \mathbb{I}_{0,n}^d,$$

será denotado por $\mathbb{I}_{0,n}^{d,m}$.

- Si $\mathbf{I} := (\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_m) \in \mathbb{I}_{0,n}^{d,m}$, se define el nuevo multi-índice $|\mathbf{I}| \in \mathbb{I}_{0,n}^d$ por

$$|\mathbf{I}| := \vec{i}_1 + \dots + \vec{i}_m. \text{ Con lo cual se obtiene}$$

$$\|\mathbf{I}\| = |\vec{i}_1| + \dots + |\vec{i}_m| = dm$$

1.2 Espacios afines

Definición 3 Una combinación afín (o combinación baricéntrica) de los puntos P_0, P_1, \dots, P_n de un espacio vectorial real W es una combinación lineal de la forma $\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n$, donde $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. En caso de que $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, se llaman combinaciones convexas.

Definición 4 Si un subconjunto A de un espacio vectorial real es cerrado sobre combinaciones afines se dice que A es un espacio afín, es decir, A es un espacio afín, si y sólo si, para cualquier conjunto de puntos $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ y números reales $\alpha_0, \alpha_1, \dots$

, $\alpha_n \in \mathbb{R}$ con $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$, se cumple que $\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n \in A$.

Definición 5 Se dice que los puntos P_0, P_1, \dots, P_n de un espacio afín A son afín independientes o que están en posición general, si y sólo si los vectores $P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_n - P_0$ son linealmente independientes.

Definición 6 Una base afín de un espacio afín A es un conjunto $B := \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ de puntos en A con la propiedad que cada punto $u \in A$ tiene una única

representación $u = \sum_{i=0}^n u_i P_i$, como una combinación afín con respecto a B .

Definición 7 Si $B := \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ es una base afín de un espacio afín A , la dimensión de éste espacio se define como el número $n = \text{Card}(B) - 1$, donde $\text{Card}(B)$ denota al número de elementos de B .

Por ejemplo, dos bases afines de dimensión 1 (una línea) y dimensión 2 (un plano) tienen dos y tres elementos respectivamente.

Definición 8 Sea A un n -espacio afín (espacio afín de dimensión n) y sean P_0, P_1, \dots, P_k ($k \leq n$) puntos en A que se encuentran en posición general. La cápsula convexa de éstos puntos es llamado un k -simplejo y los puntos vértices.

Geoméricamente la familia de los simplejos tienen el siguiente significado:

- Un 1-simplejo es un segmento de línea.
- Un 2-simplejo es un triángulo.
- Un 3-simplejo es un tetraedro y así sucesivamente.

En adelante a un n -espacio afín lo denotaremos por \mathbb{A}^n .

Si S es un n -simplejo con vértices P_0, P_1, \dots, P_n , entonces cada punto $u \in \mathbb{A}^n$ puede representarse de manera única como una combinación afín $u = u_0 P_0 + u_1 P_1 + \dots + u_n P_n$, con $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1$, (6)

donde (u_0, u_1, \dots, u_n) son llamadas las coordenadas baricéntricas de u relativo a S .

Con esto se tiene una asociación de cada punto $u \in \mathbb{A}^n$ con el punto $(u_0, u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Este proceso encaja al espacio afín \mathbb{A}^n como el subconjunto afín en \mathbb{R}^{n+1} .

Definición 9 El polinomio de n -variante de Bernstein de grado m es definido por

$$B_{\vec{i}}^m(u_0, u_1, \dots, u_n) := \binom{m}{\vec{i}} u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}, \vec{i} := (i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{I}_{0,n}^m,$$

(7)

Donde

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1 \quad y \quad \binom{m}{\vec{i}} := \begin{cases} \frac{m!}{i_0! i_1! \dots i_n!}, & \text{si } |\vec{i}| = m \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(8)

De esta definición se obtiene la siguiente relación recursiva:

$$B_{\vec{i}}^m(u_0, u_1, \dots, u_n) := \begin{cases} 1, & \text{si } m = |\vec{i}| = 0 \\ 0, & \text{si } |\vec{i}| \neq m \\ \sum_{\alpha=0}^n u_{\alpha} B_{\vec{i} - \vec{e}_{\alpha}}^{m-1}(u_0, u_1, \dots, u_n), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\vec{e}_{\alpha} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha-1}, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$$

Donde

De modo más general los polinomios de Bernstein son definidos en espacios afines.

Definición 10 Si u es un punto de un n -espacio afín cuyas coordenadas baricéntricas relativas a algún n -simplejo S son (u_0, u_1, \dots, u_n) , entonces los polinomios de Bernstein de grado m definidos sobre S están dados por

$$B_{\vec{i}}^m(\mathbf{u}) := B_{\vec{i}}^m(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (10)$$

donde

$u_0 \geq 0, u_1 \geq 0, \dots, u_n \geq 0$ y $B_{\vec{i}}^m(u_0, u_1, \dots, u_n)$ es el polinomio de n -variante de Bernstein de grado m .

El siguiente Lema afirma que el producto de los polinomios de Bernstein de grado m y k puede expresarse como un polinomio de grado $(m+k)$.

Lema 11 (Producto de polinomios multivariados de Bernstein)

Para los polinomios de Bernstein $B_{\vec{i}}^m(\mathbf{u})$ y $B_{\vec{j}}^k(\mathbf{u})$ definidos sobre un n -simplejo S se cumple

$$B_{\vec{i}}^m(\mathbf{u}) B_{\vec{j}}^k(\mathbf{u}) = \frac{\binom{m}{\vec{i}} \binom{k}{\vec{j}}}{\binom{m+k}{\vec{i}+\vec{j}}} B_{\vec{i}+\vec{j}}^{m+k}(\mathbf{u})$$

(11)

Aplicando Inducción Matemática sobre m y el Lema precedente se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 12 Sean $B_{\vec{i}_1}^d(\mathbf{u}), \dots, B_{\vec{i}_m}^d(\mathbf{u})$ polinomios de Bernstein definidos sobre un k -simplejo S y sean

$$B_{\vec{i}}^{d,m}(\mathbf{u}) := B_{\vec{i}_1}^d(\mathbf{u}) \dots B_{\vec{i}_m}^d(\mathbf{u}), \vec{i} = (\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_m) \in \mathbb{I}_{0,q}^{d,m} := \underbrace{\mathbb{I}_{0,q}^d \times \dots \times \mathbb{I}_{0,q}^d}_m$$

Entonces se cumple

$$B_{\vec{i}}^{d,m}(\mathbf{u}) = K(\mathbf{I}) B_{|\vec{i}|}^{d*m}(\mathbf{u}), \quad (12)$$

donde $K(\mathbf{I})$ es una constante combinatoria dada por

$$K(\mathbf{I}) = \frac{\binom{|\vec{i}_1|}{\vec{i}_1} \dots \binom{|\vec{i}_m|}{\vec{i}_m}}{\binom{|\mathbf{I}|}{|\mathbf{I}|}}$$

Definición 13 Sea $F : S \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función definida por

$$F(\mathbf{u}) = \sum_{|\vec{i}|=m} d_{\vec{i}} B_{\vec{i}}^m(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in S, \vec{i} := (i_0, \dots, i_n), d_{\vec{i}} \in \mathbb{R}^d, \quad (13)$$

donde S es un n -simplejo, es llamada un simplejo de Bézier de dimensión m . La función F expresado como en (13) se dice que está en la forma de Bernstein-Bézier.

Definición 14 Un simplejo de Bézier de dimensión 1 es llamado curva de Bézier, un simplejo de Bézier de dimensión 2 es llamado un triángulo de Bézier, un simplejo de Bézier de dimensión 3 es llamado un tetraedro de Bézier.

Una curva de Bézier puede expresarse en cualquiera de las dos formas: en forma estandar como en (5), o como un simplejo de Bézier de dimensión 1:

$$F(u_0, u_1) = \sum_{|(i_0, i_1)|=m} d_{(i_0, i_1)} B_{(i_0, i_1)}^m(u_0, u_1).$$

1.3 Índices de los puntos de control

El conjunto de índices \vec{i} de los puntos de control

$d_{\vec{i}}$ del simplejo (13), está dado por

$$\mathbb{I}_{0,n}^m := \{ \vec{i} := (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1} : i_0 + \dots + i_n = m \}.$$

Se define una relación de orden lexicográfico ' $<$ ' para los elementos de este conjunto mediante

$$\vec{i} := (i_0, i_1, \dots, i_n) < \vec{j} := (j_0, j_1, \dots, j_n),$$

si y sólo si $i_p < j_p$ para algún $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ y $i_q = j_q$ para todo $q = 0, 1, \dots, p-1$. Por ejemplo, el orden

lexicográfico para los elementos de $\mathbb{I}_{0,2}^3$ es

$$(0, 0, 3) < (0, 1, 2) < (0, 2, 1) < (0, 3, 0) < (1, 0, 2) < (1, 1, 1) < (1, 2, 0) < (2, 0, 1) < (2, 1, 0) < (3, 0, 0).$$

Índices de triángulos de Bézier

Para los triángulos de Bézier de grado m se usa el conjunto de índices $\mathbb{I}_{0,2}^m$. Por ejemplo, para $m = 2$ se tiene

$$\mathbb{I}_{0,2}^2 = \{(0, 0, 2), (0, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 0, 0)\}$$

cuyas componentes pueden ubicarse sobre un arreglo triangular:

$$\begin{array}{ccc} (0, 0, 2) & & \\ & (1, 0, 1) & \\ (0, 1, 1) & & (2, 0, 0) \\ & (1, 1, 0) & \\ (0, 2, 0) & & \end{array}$$

y los puntos de control deben seguir el ordenamiento del triángulo, por ejemplo

$$\begin{array}{ccc}
 d_{(0,0,2)} & & \\
 & d_{(1,0,1)} & \\
 d_{(0,1,1)} & & d_{(2,0,0)} \quad d_{\vec{i}} \in \mathbb{R}^d \\
 & d_{(1,1,0)} & \\
 d_{(0,2,0)} & &
 \end{array}$$

(14)
 Estos puntos de control no son necesariamente equidistantes.
 Se presenta un algoritmo para generar los elementos de $\mathbb{P}_{0,2}^m$:

```

Para i:=0:(1):m
  Para j:=0:(1):(m-i)
    escribir(i,j,m-i-j)
  fin
fin
    
```

Los elementos del arreglo triangular de los puntos de control $d \rightarrow i$ podrían almacenarse en un arreglo rectangular, como sigue:

$$\mathbf{D} := (\mathbf{D}_{i,j}) := \begin{bmatrix} d_{(0,0,2)} & d_{(1,0,1)} & d_{(2,0,0)} \\ d_{(0,1,1)} & d_{(1,1,0)} & * \\ d_{(0,2,0)} & * & * \end{bmatrix}$$

y para acceder al contenido de $d_{(i,j,k)}$ se usaría $d_{(i,j,k)} := D_{j+1,i+1}$. Pero lamentablemente existe un desperdicio del espacio de almacenamiento; no se está usando $D_{i,j}$ para $i > j$.

Para evitar este problema otra posibilidad sería utilizar un arreglo unidimensional S y almacenar $d_{\vec{i}}$ siguiendo el orden lexicográfico de sus índices:

$$\mathbf{S} := (\mathbf{S}_p) := [d_{(0,0,2)}, d_{(0,1,1)}, d_{(0,2,0)}, d_{(1,0,1)}, d_{(1,1,0)}, d_{(2,0,0)}]^T$$

En este caso se cumple que $d_{(i,j,k)} := S_p$, con $p := \frac{1}{2}i(2 * m - i + 3) + j + 1$, donde m es el grado.

1.4 BLOSSOMS

Definici3n 15 Sean P y Q dos espacios afines de dimensi3n finita.

Una funci3n $H: P \rightarrow Q$ es llamada afín, si preserva las combinaciones afines, esto es, si

$$H\left(\sum_{k=1}^m t_k u_k\right) = \sum_{k=1}^m t_k H(u_k), \forall u_1, \dots, u_m \in P, t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^m t_k = 1$$

Definici3n 16 Una funci3n $h: P^n \rightarrow Q$ de n argumentos multiafines, se dice que es n-afín o multi-afín, si y s3lo si es afín en cada uno de sus argumentos cuando los otros argumentos permanecen fijos; es decir, si $u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_m \in P$, se cumple

$$h(u_1, \dots, u_{k-1}, tv + (1-t)u, u_{k+1}, \dots, u_m) = th(u_1, \dots, u_{k-1}, v, u_{k+1}, \dots, u_m) + (1-t)h(u_1, \dots, u_{k-1}, u, u_{k+1}, \dots, u_m), \forall u, v \in P, t \in \mathbb{R}$$

Definici3n 17 Se dice que una funci3n $H: P \rightarrow Q$ es un polinomio de grado n, si es posible elegir un sistema de coordenadas cartesianas para P y Q donde cada coordenada de H(u) puede ser expresada como un polinomio de grado menor o igual a n y al menos con

una de ellas de grado n en las coordenadas del argumento del punto u.

Por ejemplo, una funci3n $H: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ es una funci3n polinomial de grado n si y s3lo si $H(u_1, \dots, u_q)$ es la suma de términos de la forma

$$c u_1^{k_1}, \dots, u_q^{k_q}, \quad k_1, \dots, k_q \in \mathbb{Z}_+, \quad \sum_{j=1}^q k_j \leq n$$

y donde c es una constante. La funci3n polinomial $H(u_1, u_2) = 2u_1^2 u_2^3 + 2u_1 + u_1^3$ es de 5.

Definici3n 18 Si P es de dimensi3n uno se dice que la funci3n polinomial $H: P \rightarrow Q$ es una curva polinomial y cuando P es de dimensi3n dos se dice que H es una superficie polinomial.

Por ejemplo, para $P=\mathbb{R}^2, Q=\mathbb{R}^2$, la funci3n polinomial $H: P \rightarrow Q$ definida por $H(v,w)=(v+w^2+1, vw+v)$ es una superficie de grado dos o superficie cuadrática.

Definici3n 19 Una funci3n $h: P^n \rightarrow Q^n$ -afín se dice que es simétrica si esta funci3n se mantiene constante para cualquier permutaci3n de sus argumentos, es decir, si

$$h(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = h(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n), \forall i, j = 1, \dots, n, \quad u_1, \dots, u_j \in P$$

La prueba del siguiente resultado se puede encontrar en [Ram 87].

Proposici3n 20 El principio de Blossoming (afín variante):

Si P y Q son espacios afines de dimensi3n finita, entonces las funciones polinomiales $H: P \rightarrow Q$ de grado n son equivalentes a funciones simétricas n-afines $h: P^n \rightarrow Q$. En particular, dada una de estas funciones existe una única funci3n del otro tipo que satisface la identidad $H(u) = h(u, \dots, u)$.

La funci3n h es llamada el blossom multi-af n de H y a la funci3n H se la denomina la diagonal de h.

1.4.1 Los Blossoms de superficies de B ezier

Algunos resultados para superficies de B ezier.

Proposici3n 21 Sean P y Q dos subespacios afines, $S := (P_0, P_1, \dots, P_l)$ un simplejo en P donde los vértices P_0, P_1, \dots, P_l se encuentran en posici3n general. Una funci3n simétrica y n-afín $h: P^n \rightarrow Q$ está completamente determinada por sus imágenes evaluadas en los argumentos P_0, P_1, \dots, P_l . En particular, la f3rmula

$$h(\underbrace{P_0, \dots, P_0}_{i_0}, \underbrace{P_1, \dots, P_1}_{i_1}, \dots, \underbrace{P_l, \dots, P_l}_{i_l}) = d_{\vec{i}}$$

$\forall \vec{i} := (i_0, i_1, \dots, i_l) \in \mathbb{Z}_+^{l+1}, \quad |\vec{i}| = i_0 + i_1 + \dots + i_l = n,$

proporciona una correspondencia uno a uno entre funciones simétricas n-afines h y arreglos de $\binom{n+l}{l}$ puntos $d_{\vec{i}}$ en Q.

Prueba. Como P_0, P_1, \dots, P_l se encuentran en posici3n general, cada punto $u \in P$, puede escribirse de manera única como una combinaci3n af n de puntos, en la forma

$$u = u_0 P_0 + u_1 P_1 + \dots + u_l P_l$$

Siendo $h: P^n \rightarrow Q$ una funci3n simétrica y n-afín, expandiendo el primer argumento

$u^{(1)} = u_0^{(1)}P_0 + u_1^{(1)}P_1 + \dots + u_l^{(1)}P_l$
 de h en términos de P_0, P_1, \dots, P_l , se obtiene

$$h(u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) = u_0^{(1)}h(P_0, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}) + u_1^{(1)}h(P_1, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}) + \dots + u_l^{(1)}h(P_l, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}).$$

Expandiendo de manera similar cada uno de los argumentos

$u^{(i)} = u_0^{(i)}P_0 + u_1^{(i)}P_1 + \dots + u_l^{(i)}P_l$, se obtiene

$$h(u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) = \sum_{q_1=0}^l \sum_{q_2=0}^l \dots \sum_{q_n=0}^l u_0^{(1)}u_0^{(2)}\dots u_0^{(n)} h(P_{q_1}, P_{q_2}, \dots, P_{q_n})$$

De esto se deduce

$$h(u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) = \sum_{I_i \in T} \prod_{i_0 \in I_0} u_0^{(i_0)} \prod_{i_1 \in I_1} u_1^{(i_1)} \dots \prod_{i_l \in I_l} u_l^{(i_l)} h(\underbrace{P_0, \dots, P_0}_{i_0}, \underbrace{P_1, \dots, P_1}_{i_1}, \dots, \underbrace{P_l, \dots, P_l}_{i_l}) \quad (15)$$

donde $T = \{I_i : I_i (i = 0, 1, \dots, l) \text{ es una partición de } \{1, 2, \dots, n\}\}$. Para $I_q = \emptyset$ se considera $\prod_{i \in I_q} u_i^{(i)} = 1$ y no debe aparecer P_q en el argumento de h lo que equivale a decir que aparece " $i_q = 0$ veces". La sumatoria obtenida tiene $(l+1)^n$ términos.

Proposición 22 Sea A^l un subespacio afín de dimensión l y $S := (P_0, P_1, \dots, P_l)$ ($l \leq d$) un simplejo en A^l con los vértices P_0, P_1, \dots, P_l que se encuentran en posición general.

Sea $H : A^l \rightarrow R^d$ un polinomio de grado n y $h : (A^l)^n \rightarrow R^d$ su blossom. Entonces la red de control de Bézier de H relativa a S (de lo que corresponde a $H(S)$) son los valores del blossom:

$$d_{\vec{i}} := h(\underbrace{P_0, \dots, P_0}_{i_0}, \underbrace{P_1, \dots, P_1}_{i_1}, \dots, \underbrace{P_l, \dots, P_l}_{i_l})$$

para todo

$$\vec{i} := (i_0, i_1, \dots, i_l) \in \mathbb{Z}_+^{l+1} \text{ con } |\vec{i}| = i_0 + i_1 + \dots + i_l = n.$$

Prueba. Si todos los argumentos del Blossom $h(u^{(1)}, \dots, u^{(l)})$ son iguales a $u = u_0P_0 + u_1P_1 + \dots + u_lP_l$, los $(l+1)^n$ términos de la sumatoria dados por (15), se reducen a

$$h(u, u, \dots, u) = \sum_{|\vec{i}|=n} \binom{n}{\vec{i}} u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_l^{i_l} h(\underbrace{P_0, \dots, P_0}_{i_0}, \underbrace{P_1, \dots, P_1}_{i_1}, \dots, \underbrace{P_l, \dots, P_l}_{i_l})$$

De la definición 9 del polinomio l -variante de Bernstein de grado n se obtiene

$$h(u, u, \dots, u) = \sum_{|\vec{i}|=n} B_{\vec{i}}^n(u_0, u_1, \dots, u_l) h(\underbrace{P_0, \dots, P_0}_{i_0}, \underbrace{P_1, \dots, P_1}_{i_1}, \dots, \underbrace{P_l, \dots, P_l}_{i_l})$$

Comparando con la definición de la representación en forma de Bernstein-Bézier, se obtiene el resultado buscado.

Para $l = 2$, resulta:

Corolario 23 (Pedazos de Superficie triangular de Bézier)

Sea $H : A^2 \rightarrow R^d$ un polinomio de grado n y $h : (A^2)^n \rightarrow R^d$ su blossom. Sean P_0, P_1, P_2 los vértices de un triángulo de Bézier $\Delta P_0P_1P_2$, entonces los puntos de Bézier con los cuales es controlado el pedazo de superficie triangular $H(\Delta P_0P_1P_2)$ son los valores del blossom

$$h(\underbrace{P_0, \dots, P_0}_i, \underbrace{P_1, \dots, P_1}_j, \underbrace{P_2, \dots, P_2}_k)$$

con $i + j + k = n, i, j, k \in \mathbb{Z}_+$

Ejemplo 24: El paraboloide $S: z = x^2 + y^2$ está definido por el polinomio cuadrático $F: R^2 \rightarrow R^3, F(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. El blossom $f: R^2 \times R^2 \rightarrow R^3$ de éste polinomio cuadrático $F(u, v)$ está dado por $f(\overline{w_1}, \overline{w_2}) = (\frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2}, u_1u_2 + v_1v_2)$ donde

$$\overline{w_1} = (u_1, v_1) \text{ y } \overline{w_2} = (u_2, v_2).$$

Consideremos el triángulo $\Delta P_0P_1P_2 = (0,0), P_1=(0,1), P_2=(1,0)$, luego se tiene que $F(\Delta P_0P_1P_2)$ define un pedazo triangular de la superficie cuadrática S . Los puntos de Bézier están dados por

$$d_{(0,0,2)} := f(P_2, P_2) = f((1, 1), (1, 1)) = (1, 1, 2),$$

$$d_{(0,1,1)} := f(P_1, P_2) = f((0, 1), (1, 1)) = (1/2, 1, 1),$$

$$d_{(0,2,0)} := f(P_1, P_1) = f((0, 1), (0, 1)) = (0, 1, 1),$$

$$d_{(1,0,1)} := f(P_0, P_2) = f((0, 0), (1, 1)) = (1/2, 1/2, 0),$$

$$d_{(1,1,0)} := f(P_0, P_1) = f((0, 0), (0, 1)) = (0, 1/2, 0),$$

$$d_{(2,0,0)} := f(P_0, P_0) = f((0, 0), (0, 0)) = (0, 0, 0).$$

1.4.2 Los Blossoms de simplejos de Bézier.

A partir de una observación de DeRose [DeRo 88, ag. 213], se deduce y formaliza el siguiente resultado para simplejos de Bézier.

Teorema 25 Sea $H_{\vec{i}}^m: R^N \rightarrow R^d$ un simplejo de Bézier de dimensión N :

$$H_{\vec{i}}^m(u) = \sum_{|\vec{j}|=m} d_{\vec{T}+\vec{j}} B_{\vec{j}}^m(u), u \in R^N, \vec{i} \in \mathbb{Z}_+^{N+1}, d_{\vec{T}+\vec{j}} \in R^d, \vec{i}, \vec{j} \in \mathbb{Z}_+^{N+1}$$

La función $h^m: (R^N)^m \rightarrow R^d$ definida por $h^m(u_1, u_2, \dots, u_m) := h_{\vec{T}}(u_1, u_2, \dots, u_m; d)$, es el blossom de $H^m(u)$, donde

$$h_{\vec{T}}(u_1, u_2, \dots, u_m; d) := \begin{cases} \sum_{\alpha=0}^N u_1^\alpha d_{\vec{T}+\vec{\alpha}_{\alpha+1}}, & \text{si } m = 1 \\ \sum_{\alpha=0}^N u_m^\alpha h_{\vec{T}+\vec{\alpha}_{\alpha+1}}(u_1, \dots, u_{m-1}; d) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\vec{i} \in \mathbb{Z}_+^{N+1}$ y u_m^0, \dots, u_m^N son las coordenadas baricéntricas de u_m respecto al dominio simplejo de H^m y d es el vector que contiene a los puntos de control de H^m .

Prueba. Debido a la unicidad del Blossom de un polinomio, será suficiente probar que h^1 es simétrico, n -afín y $h^l(u, \dots, u) = H^l(u)$. Lo cuál se va a probar por inducción completa sobre l :

$l=1$: Se cumple

$$\begin{aligned} h^1(u_1) = h_1(u_1; d) &= (1 - u_1)d_i + u_1d_{i+1} \\ &= d_i B_0^1(u) + d_{i+1} B_1^1(u) \\ &= H_1(u) \end{aligned}$$

y $h^1(u)$ es simétrico y 1-afín.

Hipótesis Inductiva:

a) $h^{l-1}(u_1, \dots, u_{l-1})$ es simétrico y $(l-1)$ -afín.

$$H_i^{l-1}(u) = h_i^{l-1}(\underbrace{u, \dots, u}_{(l-1)}).$$

b) Veamos para l :

a) De la definición de h^l y la hipótesis inductiva a), se obtiene que es l -afín y para la simetría será suficiente probar que $h_i(u_1, u_2, \dots, u_{l-1}, u_{l-1}; d) = h_i(u_1, u_2, \dots, u_{l-1}, u; d)$.

De la definici3n de h^l y de hip3tesis inductiva (a) se cumple:

$$\begin{aligned} h_i(u_1, \dots, u_i; \mathbf{d}) &= (1 - u_i)h_i(u_1, u_2, \dots, u_{i-2}, u_{i-1}; \mathbf{d}) + u_i h_{i+1}(u_1, u_2, \dots, u_{i-2}, u_{i-1}; \mathbf{d}) \\ &= (1 - u_i)h_i(u_{i-1}, u_2, \dots, u_{i-2}, u_1; \mathbf{d}) + u_i h_{i+1}(u_{i-1}, u_2, \dots, u_{i-2}, u_1; \mathbf{d}) \\ &= (1 - u_i)[(1 - u_i)h_i(u_{i-1}, u_2, \dots, u_{i-2}; \mathbf{d}) + u_i h_{i+1}(u_{i-1}, u_2, \dots, u_{i-2}; \mathbf{d})] \\ &\quad + u_i[(1 - u_i)h_{i+1}(u_{i-1}, u_2, \dots, u_{i-2}; \mathbf{d}) + u_i h_{i+2}(u_{i-1}, u_2, \dots, u_{i-2}; \mathbf{d})] \\ &= (1 - u_i)[(1 - u_i)h_i(u_{i-1}, u_2, \dots, u_{i-2}; \mathbf{d}) + u_i h_{i+1}(u_{i-1}, u_2, \dots, u_{i-2}; \mathbf{d})] \\ &\quad + u_i[(1 - u_i)h_{i+1}(u_{i-1}, u_2, \dots, u_{i-2}; \mathbf{d}) + u_i h_{i+2}(u_{i-1}, u_2, \dots, u_{i-2}; \mathbf{d})] \\ &= (1 - u_i)h_i(u_{i-1}, u_2, \dots, u_{i-2}, u_i; \mathbf{d}) + u_i h_{i+1}(u_{i-1}, u_2, \dots, u_{i-2}, u_i; \mathbf{d}) \\ &= (1 - u_i)h_i(u_1, u_2, \dots, u_{i-2}, u_{i-1}; \mathbf{d}) + u_i h_{i+1}(u_1, u_2, \dots, u_{i-2}, u_{i-1}; \mathbf{d}) \\ &= h_i(u_1, u_2, \dots, u_{i-2}, u_{i-1}, u_i; \mathbf{d}). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} h^l(u_1, \dots, u_l) &= h_l(u_1, \dots, u_l; \mathbf{d}) \\ &= (1 - u_l)h_l(u_1, \dots, u_{l-1}; \mathbf{d}) + u_l h_{l+1}(u_1, \dots, u_{l-1}; \mathbf{d}) \\ &= (1 - u_l)H_{l-1}^{-1}(u) + u H_{l+1}^{-1}(u) \\ &= (1 - u) \sum_{j=0}^{l-1} d_{l+j} B_j^{l-1}(u) + u \sum_{j=0}^{l-1} d_{l+1+j} B_j^{l-1}(u) \\ &= (1 - u) \sum_{j=0}^{l-1} d_{l+j} B_j^{l-1}(u) + u \sum_{j=1}^l d_{l+j} B_{j-1}^{l-1}(u) \\ &= (1 - u) d_l B_0^{l-1}(u) + \sum_{j=1}^{l-1} [(1 - u) B_j^{l-1}(u) + u B_{j-1}^{l-1}(u)] d_{l+j} + u d_{l+l} B_{l-1}^{l-1}(u). \end{aligned}$$

De la definici3n y propiedad recursiva de los polinomios de Bernstein, se obtiene:

$$\begin{aligned} h^l(u_1, \dots, u_l) &= B_0^l(u) d_l + \sum_{j=1}^{l-1} d_{l+j} B_j^l(u) + B_l^l(u) d_{l+l} \\ &= \sum_{j=0}^l d_{l+j} B_j^l(u) = H_l(u). \end{aligned}$$

A partir de éste resultado, definiendo

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\vec{k}}^{(0)} &:= \mathbf{d}_{\vec{k}}, \quad |\vec{k}| = m \\ \mathbf{b}_{\vec{k}}^{(i)} &:= \sum_{\alpha=0}^i u^\alpha h_{\vec{k} + \vec{e}_{\alpha+1}}(u_1, \dots, u_{i-1}; \mathbf{d}), \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

se obtiene el algoritmo de de Casteljau para simplejos de B ezier.

Corolario 26 (Algoritmo de de Casteljau para simplejos de B ezier)

Sea $H_{\vec{I}}^m: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ un simplejo de B ezier de dimensi3n N :

$$H^m(\mathbf{u}) = \sum_{|\vec{J}|=m} d_{\vec{J}} B_{\vec{J}}^m(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N, \quad d_{\vec{J}} \in \mathbb{R}^d, \quad \vec{J} \in Z_+^{N+1}$$

Sean

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\vec{k}}^{(0)} &:= \mathbf{d}_{\vec{k}}, \quad \vec{k} \in Z_+^{N+1}, \quad |\vec{k}| = m, \\ \mathbf{b}_{\vec{k}}^{(i)} &:= \sum_{\alpha=0}^i u^\alpha \mathbf{b}_{\vec{k} + \vec{e}_{\alpha+1}}^{(i-1)}, \quad \vec{k} \in Z_+^{N+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad |\vec{k}| = m - i \end{aligned}$$

donde u_0^0, \dots, u_m^N son las coordenadas baric tricas de un respecto al dominio simplejo de H^m .

Entonces $H(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_{\vec{0}}^{(m)}$.

3. Discusi3n

3.1 Composici3n de Simplejos de B ezier

Esta secci3n está basada en los trabajos de DeRose [DeRo 88] y [DeRo 93]. Se desarrollarán los fundamentos te3ricos para construir algoritmos eficientes para encontrar los puntos de control de la composici3n $\widehat{F} = F \circ g$ de dos simplejos de B ezier $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($n \leq N \leq d$) a partir de los puntos de control de g y F . Se resuelve el problema de obtener los puntos de control de la composici3n de dos simplejos de B ezier de manera general aplicando la teoría de los Blossom.

3.2 Composici3n de Simplejos de B ezier por Blossoms

El siguiente Teorema es una reformulaci3n más detallada de un resultado sobre la composici3n de dos simplejos de B ezier basado en [DeRo 93, pag 125]. Se corrigen los errores tipográficos del resultado original y la notaci3n utilizada en esta nueva presentaci3n es más sencilla. La notaci3n utilizada para los conjuntos de índices permite un manejo más sencillo de los índices. Representando una funci3n mediante su blossom se obtiene una prueba más concisa del Teorema.

Teorema 27 Dados los espacios afines P_n de dimensi3n n , Q_N de dimensi3n N y R de dimensi3n arbitraria. Sean los puntos de control que definen un simplejo de B ezier de grado k , $g: P_n \rightarrow Q_N$ relativo al dominio simplejo $\Delta_n \subset P_n$ y $\{\vec{d}_{\vec{I}}: \vec{I} \in \mathbb{I}_{0,n}^k\}$ los puntos de control que definen un simplejo de B ezier de grado m , $F: Q_N \rightarrow R$ relativo al dominio simplejo $\Delta_{Q_N} \subset Q_N$ y sea $f: Q_N^m \rightarrow R$ el blossom de F . Entonces los puntos de control $\{\vec{d}_{\vec{J}}: \vec{J} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k+m}\}$ del simplejo de B ezier $D(\mathbf{u}) = F(g(\mathbf{u}))$ de grado $m * k$ relativo al simplejo Δ_{P_n} están dados por

$$\vec{d}_{\vec{J}} = \sum_{\substack{\mathbf{I} \in \mathbb{I}_{1,n}^{k,m} \\ |\mathbf{I}| = \vec{J}}} K(\mathbf{I}) f(\mathbf{b}_{\mathbf{I}}), \quad \vec{J} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k+m}, \quad (16)$$

donde $K(\mathbf{I})$ son las constantes combinatorias dados por

$$K(\mathbf{I}) = \frac{\binom{|\vec{I}_1|}{\vec{I}_1} \dots \binom{|\vec{I}_m|}{\vec{I}_m}}{\binom{|\mathbf{I}|}{\mathbf{I}}} \quad (17)$$

y $\mathbf{b}_{\mathbf{I}} := (\mathbf{b}_{\vec{I}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{I}_m})$ con

$$\mathbf{I} := (\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_m), \quad \vec{i}_p \in \mathbb{I}_{0,n}^1, \quad \vec{i} := (i_0, \dots, i_n) \in Z_+^{n+1} : i_0 + \dots + i_n = l$$

$$\text{y } |\mathbf{I}| = |\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_m| = \vec{i}_1 + \dots + \vec{i}_m.$$

Prueba. Como $f: Q_N^m \rightarrow R$ es el blossom de F se cumple que

$$D(\mathbf{u}) = F(g(\mathbf{u})) = f(\underbrace{g(u), \dots, g(u)}_m) \quad (18)$$

Sustituyendo la forma de B ezier- Bernstein de $g(\mathbf{u})$ se obtiene

$$D(\mathbf{u}) = f\left(\sum_{\vec{i}_1 \in \mathbb{I}_{0,n}^k} \mathbf{b}_{\vec{i}_1} B_{\vec{i}_1}^k(\mathbf{u}), \dots, \sum_{\vec{i}_m \in \mathbb{I}_{0,n}^k} \mathbf{b}_{\vec{i}_m} B_{\vec{i}_m}^k(\mathbf{u})\right)$$

(19)

Dado que los polinomios de Bernstein suman uno, se tiene que el primer argumento es una combinaci3n

af n de los puntos $\vec{d}_{\vec{i}_1}$ y siendo f una funci3n afín en cada uno de sus argumentos, se obtiene

$$D(\mathbf{u}) = \sum_{\vec{i}_1 \in \mathbb{I}_{0,n}^k} f(\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \sum_{\vec{i}_m \in \mathbb{I}_{0,n}^k} \mathbf{b}_{\vec{i}_m} B_{\vec{i}_m}^k(\mathbf{u})) B_{\vec{i}_1}^k(\mathbf{u})$$

(20)

Usando el mismo criterio en el resto de los argumentos, resulta la expresi3n

$$D(\mathbf{u}) = \sum_{\vec{i} \in \mathbb{I}_{0,n}^k} \dots \sum_{\vec{i}_m \in \mathbb{I}_{0,n}^k} f(\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{i}_m}) B_{\vec{i}_1}^k(\mathbf{u}) \dots B_{\vec{i}_m}^k(\mathbf{u}) \quad (21)$$

Utilizando la notación de hiper-índices, escribimos

$$D(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{I} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k,m}} f(\mathbf{b}_{\mathbf{I}}) B_{\mathbf{I}}^{k,m}(\mathbf{u}) \quad (22)$$

Aplicando el Lema 11 para el producto de polinomios multivariados de Bernstein, se obtiene

$$D(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{I} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k,m}} f(\mathbf{b}_{\mathbf{I}}) K(\mathbf{I}) B_{|\mathbf{I}|}^{k+m}(\mathbf{u}) \quad (23)$$

El \vec{j} -ésimo coeficiente de Bézier es el coeficiente

que multiplica a $B_{\vec{j}}^{k+m}(\mathbf{u})$. Estos puntos pueden ser obtenidos agrupando todos los términos tales que $|\mathbf{I}| = \vec{j}$, obteniendo

$$D(\mathbf{u}) = \sum_{\vec{j} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k,m}} \left(\sum_{\substack{\mathbf{I} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k,m} \\ |\mathbf{I}| = \vec{j}}} f(\mathbf{b}_{\mathbf{I}}) K(\mathbf{I}) \right) B_{\vec{j}}^{k+m}(\mathbf{u}) \quad (24)$$

y como los polinomios de Bernstein son linealmente independientes se obtiene finalmente que los puntos de control están dados por

$$\tilde{\mathbf{d}}_{\vec{j}} = \sum_{\substack{\mathbf{I} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k,m} \\ |\mathbf{I}| = \vec{j}}} f(\mathbf{b}_{\mathbf{I}}) K(\mathbf{I}), \quad \vec{j} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k+m} \quad (25)$$

En los puntos de control $\tilde{\mathbf{d}}_{\vec{j}}$ dados por (25) no aparecen explícitamente los puntos de control del simplejo de Bézier F, sin embargo ellos son requeridos para evaluar el blossom f de F en cualquier punto \mathbf{b}_i . Luego, para la implementación computacional se necesita evaluar el blossom f de la función F en cualquier punto. A continuación se propone un algoritmo para evaluar el blossom f de una función F:

EvalBlossom(d, b, m, ΔQ)
Entrada: d : Red de control de un simplejo de Bézier F de dimensión k. $\mathbf{b} := (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m)$: Punto donde va a ser evaluado el blossom f de F. m : grado de F. ΔF : dominio simplejo de F.
Para todo $\vec{i} \in \mathbb{I}_{0,k}^m$
$\mathbf{W}_{\vec{i}}^{[0]} := \mathbf{d}_{\vec{i}}$
Para p := 1, ..., m
(u_0, \dots, u_k) : coordenadas baricentricas de \mathbf{b}_p relativo al dominio simplejo ΔF.
Para todo $\vec{i} \in \mathbb{I}_{0,k}^{m-p}$
$\mathbf{W}_{\vec{i}}^{[p]} := u_0 \mathbf{W}_{\vec{i} + \vec{e}_1}^{[p-1]} + \dots + u_k \mathbf{W}_{\vec{i} + \vec{e}_{k+1}}^{[p-1]}$
$\mathbf{f}(\mathbf{b}) := \mathbf{W}_{\vec{0}}^{[m]}$
Salida: f(b)

donde $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ y

$$\mathbb{I}_{1,k}^d := \{ \vec{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{Z}_+^k : i_1 + \dots + i_k = d \}.$$

Para la composición de una superficie de Bézier y una curva de Bézier, con $n = 1$ y $N = 2$, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 28 Considerense los espacios afines P_1 de dimensión 1, Q_2 de dimensión 2 y R de dimensión arbitraria. Sean $\{\mathbf{b}_{\vec{i}} : \vec{i} \in \mathbb{I}_{0,1}^k\}$ los puntos de control que definen una curva de Bézier de grado k, $g: P_1 \rightarrow Q_2$ relativo al dominio simplejo

$\Delta_{P_1} \subset P_1$ y $\{\mathbf{d}_{\vec{i}} : \vec{i} \in \mathbb{I}_{0,2}^m\}$ los puntos de control que definen una superficie de Bézier de grado m, $F: Q_2 \rightarrow R$ relativo al dominio simplejo $\Delta_{Q_2} \subset Q_2$ y sea $\mathbf{f}: Q_2^m \rightarrow R$ el blossom de F. Entonces los puntos de control $\{\tilde{\mathbf{d}}_{\vec{j}} : \vec{j} \in \mathbb{I}_{0,1}^{k+m}\}$ de la curva de Bézier $D(\mathbf{u}) = F(g(\mathbf{u}))$ de grado $m * k$ relativo al simplejo Δ_{P_1} están dados por

$$\tilde{\mathbf{d}}_{\vec{j}} = \sum_{\substack{\mathbf{I} \in \mathbb{I}_{0,1}^{k,m} \\ |\mathbf{I}| = \vec{j}}} K(\mathbf{I}) f(\mathbf{b}_{\mathbf{I}}), \vec{j} \in \mathbb{I}_{0,1}^{k+m},$$

(26)

donde $K(\mathbf{I})$ son las constantes combinatorias dados por

$$K(\mathbf{I}) = \frac{\binom{|\vec{i}_1|}{i_1} \cdots \binom{|\vec{i}_m|}{i_m}}{\binom{|\mathbf{I}|}{|\mathbf{I}|}}$$

(27)

con $\mathbf{b}_{\mathbf{I}} := (\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{i}_m})$ y donde $\mathbf{I} \in \mathbb{I}_{0,1}^{k,m}$ si y sólo si

$$\mathbf{I} := (\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_m), \vec{i}_p \in \mathbb{I}_{0,1}^s := \{ \vec{i} = (s-i, i) : i = 0, \dots, s \}$$

y

$$|\mathbf{I}| = |(\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_m)| = \vec{i}_1 + \dots + \vec{i}_m$$

Mediante los simplejos de Bézier se pueden representar una aproximación de una superficie de manera más flexible que mediante la representación de producto tensorial de Bézier, sin embargo la representación de los puntos de control de una superficie de Bézier deben seguir un ordenamiento especial (del triángulo), el cual se desarrolla en la subsección 1.3. Un simplejo de Bézier está determinado por sus puntos de control y es lo que usualmente se tiene.

Según el resultado precedente para la composición de una superficie y una curva de Bézier se requieren de los puntos de control de ambas.

Para diseñar una curva sobre una superficie se

requieren de los puntos de control $\{\mathbf{d}_{\vec{i}} : \vec{i} \in \mathbb{I}_{0,2}^m\}$ de una superficie de Bézier F y los puntos de control

$\{\mathbf{b}_{\vec{i}}^{(0)} : \vec{i} \in \mathbb{I}_{0,1}^k\}$ de una curva de Bézier $g^{(0)}$ de grado k . Los puntos de control $\{\tilde{\mathbf{d}}_{\vec{j}}^{(0)} : \vec{j} \in \mathbb{I}_{0,1}^{k+m}\}$ de la curva de Bézier $D = \text{Fog}^{(0)}$ de grado $m \cdot k$ dependen de los puntos de control

$\{\mathbf{b}_{\vec{i}}^{(0)}, \vec{i} \in \mathbb{I}_{0,1}^k\}$. Al diseñar la curva modificando (moviendo) los puntos de control $\{\mathbf{b}_{\vec{i}}^{(0)} : \vec{i} \in \mathbb{I}_{0,1}^k\}$ se obtienen otros puntos de

control $\{\mathbf{b}_{\vec{i}}^{(1)} : \vec{i} \in \mathbb{I}_{0,1}^k\}$ que definen una nueva curva $g^{(1)}$ y los puntos de control $\{\tilde{\mathbf{d}}_{\vec{j}}^{(1)} : \vec{j} \in \mathbb{I}_{0,1}^{k+m}\}$ de la curva de Bézier deformada $D^{(1)} = F \circ g^{(1)}$ sobre la superficie F . Así, sucesivamente al continuar diseñando modificando (moviendo) los puntos de control

$\{\mathbf{b}_{\vec{i}}^{(s)} : \vec{i} \in \mathbb{I}_{0,1}^k\}$ se obtienen otros puntos de control $\{\mathbf{b}_{\vec{i}}^{(s+1)} : \vec{i} \in \mathbb{I}_{0,1}^k\}$ que definen una nueva curva $g^{(s+1)}$ y los puntos de control $\{\tilde{\mathbf{d}}_{\vec{j}}^{(s+1)} : \vec{j} \in \mathbb{I}_{0,1}^{k+m}\}$ de la curva de Bézier deformada $D^{(s+1)} = F \circ g^{(s+1)}$ sobre la superficie F .

Para la implementación se puede usar un compilador o software de implementación donde se pueda manejar gráficos, evidentemente mediante el uso de un compilador y una buena programación se tendrá mayor rapidez. Se requieren mostrar dos gráficos sobre el monitor, un gráfico donde se represente una curva de Bézier cuyos puntos de control se puedan manipular (dinámicamente) mediante el mouse y otro gráfico donde se represente la superficie y la composición.

En la siguiente sección se presenta un ejemplo de aplicación donde la superficie es conocida y es fácil de verificar los resultados. En este ejemplo, mediante los blossom se encuentran los puntos de control y se muestran paso a paso como funciona la composición de una curva y una superficie de Bézier.

4. Resultados

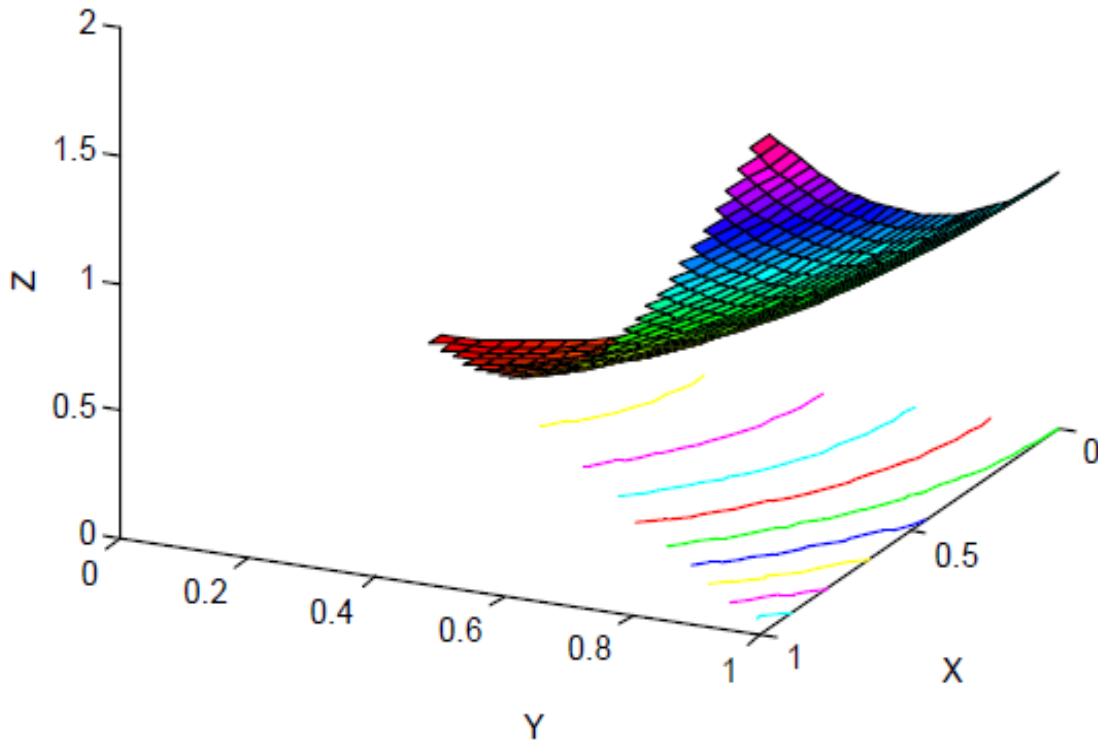
En la sección anterior se han desarrollado las bases para diseñar una curva sobre una superficie, mediante la transformación de otra curva de Bézier que se encuentra sobre un plano cuyos puntos de control son fáciles de manipular. Se presenta un ejemplo de aplicación donde la superficie es conocida y es fácil de verificar los resultados. Sólo se presenta un instante del diseño de una curva sobre una superficie, lo que significa realizar una composición de una superficie y una curva. Este procedimiento se muestra paso a paso en detalle.

Se desea diseñar una curva sobre la superficie $S: z = x^2 + y^2$. Para lo cual consideremos el triángulo $\Delta F = \Delta P_0 P_1 P_2$ con $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (1,1)$ y los puntos de Bézier F del ejemplo (24).

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{(0,0,2)} &= (1, 1, 2), & \mathbf{d}_{(1,0,1)} &= (1/2, 1/2, 0), \\ \mathbf{d}_{(0,1,1)} &= (1/2, 1, 1), & \mathbf{d}_{(2,0,0)} &= (0, 0, 0) \\ \mathbf{d}_{(0,2,0)} &= (0, 1, 1), & \mathbf{d}_{(1,1,0)} &= (0, 1/2, 0), \end{aligned}$$

En la práctica los puntos de Bézier de una superficie son dados y no se requiere del paso anterior.

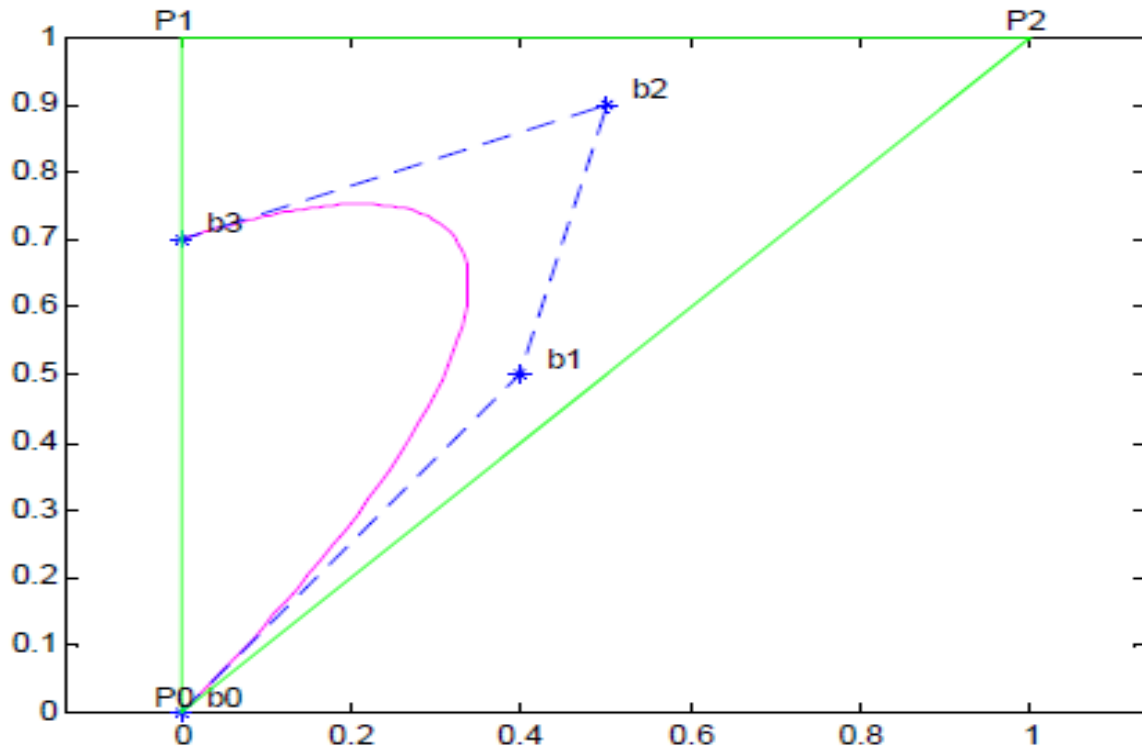
Figura 3.1 Gráfico del simplejo de Bézier, que es una parte del paraboloides $S : z = x^2 + y^2$.



Por ejemplo, para un instante del diseño consideremos la curva de Bézier g que se muestra en la Figura 3.2 cuyos puntos de Bézier son $\tilde{b}_0 = (0, 0)$, $\tilde{b}_1 = (0.4, 0.5)$, $\tilde{b}_2 = (0.5, 0.9)$, $\tilde{b}_3 = (0, 0.7)$.

La curva de Bézier $D(u) = F(g(u))$ se encuentra sobre la superficie S , y para proyectarla sobre ella se requieren de los correspondientes puntos de control.

Figura 3.2 Gráfica de una curva de Bézier generada mediante los puntos de control que se encuentran en el triángulo $\Delta P_0 P_1 P_2$ el cual es el dominio de la superficie de Bézier.



En la práctica se da una secuencia de los puntos de control que se están diseñando como sigue $\tilde{\mathbf{b}}_0, \tilde{\mathbf{b}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_k$, los respectivos puntos de control que definen el respectivo simplejo de B ezier se da mediante la relaci3n

$$\mathbf{b}_{(k-i,i)} := \tilde{\mathbf{b}}_i, i = 0, \dots, k.$$

En particular para los puntos de B ezier $\tilde{\mathbf{b}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_3$ se tiene $k = 3$ y

$$\mathbf{b}_{(3,0)} := \tilde{\mathbf{b}}_0, \mathbf{b}_{(2,1)} := \tilde{\mathbf{b}}_1, \mathbf{b}_{(1,2)} := \tilde{\mathbf{b}}_2, \mathbf{b}_{(0,3)} := \tilde{\mathbf{b}}_3$$

Para los triángulos de B ezier de grado $m = 2$ se usa el conjunto de índices

$\mathbb{I}_{0,2}^2 = \{(0, 0, 2), (0, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 0, 0)\}$, los puntos de control deben seguir el ordenamiento dado en (14).

En este caso $k*m=6$ y el conjunto de los índices de

los puntos de control $\{\tilde{\mathbf{d}}_{\vec{j}} : \vec{j} \in \mathbb{I}_{0,1}^6\}$ del simplejo de B ezier $D(u) = F(g(u))$ de grado 6, está dado por

$$\mathbb{I}_{0,1}^{k*m} = \mathbb{I}_{0,1}^6 = \{(6, 0), (5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5), (0, 6)\}$$

Los puntos de B ezier están definidos por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{d}}_0 &:= \tilde{\mathbf{d}}_{(6,0)} = K((3, 0), (3, 0)) f(\mathbf{b}_{(3,0)}, \mathbf{b}_{(3,0)}) \\ \tilde{\mathbf{d}}_1 &:= \tilde{\mathbf{d}}_{(5,1)} = K((3, 0), (2, 1)) f(\mathbf{b}_{(3,0)}, \mathbf{b}_{(2,1)}) + K((2, 1), (3, 0)) f(\mathbf{b}_{(2,1)}, \mathbf{b}_{(3,0)}) \\ \tilde{\mathbf{d}}_2 &:= \tilde{\mathbf{d}}_{(4,2)} = K((2, 1), (2, 1)) f(\mathbf{b}_{(2,1)}, \mathbf{b}_{(2,1)}) + K((3, 0), (1, 2)) f(\mathbf{b}_{(3,0)}, \mathbf{b}_{(1,2)}) \\ &\quad + K((1, 2), (3, 0)) f(\mathbf{b}_{(1,2)}, \mathbf{b}_{(3,0)}) \\ \tilde{\mathbf{d}}_3 &:= \tilde{\mathbf{d}}_{(3,3)} = K((3, 0), (0, 3)) f(\mathbf{b}_{(3,0)}, \mathbf{b}_{(0,3)}) + K((0, 3), (3, 0)) f(\mathbf{b}_{(0,3)}, \mathbf{b}_{(3,0)}) \\ &\quad + K((2, 1), (1, 2)) f(\mathbf{b}_{(2,1)}, \mathbf{b}_{(1,2)}) + K((1, 2), (2, 1)) f(\mathbf{b}_{(1,2)}, \mathbf{b}_{(2,1)}) \\ \tilde{\mathbf{d}}_4 &:= \tilde{\mathbf{d}}_{(2,4)} = K((1, 2), (1, 2)) f(\mathbf{b}_{(1,2)}, \mathbf{b}_{(1,2)}) + K((2, 1), (0, 3)) f(\mathbf{b}_{(2,1)}, \mathbf{b}_{(0,3)}) \\ &\quad + K((0, 3), (2, 1)) f(\mathbf{b}_{(0,3)}, \mathbf{b}_{(2,1)}) \\ \tilde{\mathbf{d}}_5 &:= \tilde{\mathbf{d}}_{(1,5)} = K((0, 3), (1, 2)) f(\mathbf{b}_{(0,3)}, \mathbf{b}_{(1,2)}) + K((1, 2), (0, 3)) f(\mathbf{b}_{(1,2)}, \mathbf{b}_{(0,3)}) \\ \tilde{\mathbf{d}}_6 &:= \tilde{\mathbf{d}}_{(0,6)} = K((0, 3), (0, 3)) f(\mathbf{b}_{(0,3)}, \mathbf{b}_{(0,3)}) \end{aligned}$$

Calculando los valores de los respectivos coeficientes $K(., .)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{d}}_0 &= f(\mathbf{b}_{(3,0)}, \mathbf{b}_{(3,0)}) \\ \tilde{\mathbf{d}}_1 &= 0.5 f(\mathbf{b}_{(3,0)}, \mathbf{b}_{(2,1)}) + 0.5 f(\mathbf{b}_{(2,1)}, \mathbf{b}_{(3,0)}) \\ \tilde{\mathbf{d}}_2 &= 0.6 f(\mathbf{b}_{(2,1)}, \mathbf{b}_{(2,1)}) + 0.2 f(\mathbf{b}_{(3,0)}, \mathbf{b}_{(1,2)}) + 0.2 f(\mathbf{b}_{(1,2)}, \mathbf{b}_{(3,0)}) \\ \tilde{\mathbf{d}}_3 &= 0.05 f(\mathbf{b}_{(3,0)}, \mathbf{b}_{(0,3)}) + 0.05 f(\mathbf{b}_{(0,3)}, \mathbf{b}_{(3,0)}) + 0.6 f(\mathbf{b}_{(2,1)}, \mathbf{b}_{(1,2)}) \\ &\quad + 0.6 f(\mathbf{b}_{(1,2)}, \mathbf{b}_{(2,1)}) \\ \tilde{\mathbf{d}}_4 &= 0.6 f(\mathbf{b}_{(1,2)}, \mathbf{b}_{(1,2)}) + 0.2 f(\mathbf{b}_{(2,1)}, \mathbf{b}_{(0,3)}) + 0.2 f(\mathbf{b}_{(0,3)}, \mathbf{b}_{(2,1)}) \\ \tilde{\mathbf{d}}_5 &= 0.5 f(\mathbf{b}_{(0,3)}, \mathbf{b}_{(1,2)}) + 0.5 f(\mathbf{b}_{(1,2)}, \mathbf{b}_{(0,3)}) \\ \tilde{\mathbf{d}}_6 &= f(\mathbf{b}_{(0,3)}, \mathbf{b}_{(0,3)}) \end{aligned}$$

Para evaluar el blossomf en $(\mathbf{b}_{(3-j,j)}, \mathbf{b}_{(3-k,k)})$ para $k, j = 0, 1, 2, 3$ según el algoritmo EvalBlossom, se deben calcular las coordenadas baricentricas $u_j = (u_{(j,0)}, u_{(j,1)}, u_{(j,2)})$ y $u_k = (u_{(k,0)}, u_{(k,1)}, u_{(k,2)})$, respectivamente respecto al triángulo $\Delta F = \Delta P_0 P_1 P_2$, esto es, se debe solucionar dos sistemas lineales de la forma

$$\begin{pmatrix} P_0^T & P_1^T & P_2^T \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{(i,0)} \\ u_{(i,1)} \\ u_{(i,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{(3-i,i)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los cálculos principales del algoritmo son los siguientes

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{(1,0,0)}^{(1)} &= u_{(k,0)} * \mathbf{w}_{(2,0,0)}^{(0)} = +u_{(k,1)} * \mathbf{w}_{(1,1,0)}^{(0)} + u_{(k,2)} * \mathbf{w}_{(1,0,1)}^{(0)} \\ &= u_{(k,0)} * \mathbf{d}_{(2,0,0)} + u_{(k,1)} * \mathbf{d}_{(1,1,0)} + u_{(k,2)} * \mathbf{d}_{(1,0,1)} \\ \mathbf{w}_{(0,1,0)}^{(1)} &= u_{(k,0)} * \mathbf{w}_{(1,1,0)}^{(0)} + u_{(k,1)} * \mathbf{w}_{(0,2,0)}^{(0)} + u_{(k,2)} * \mathbf{w}_{(0,1,1)}^{(0)}, \\ &= u_{(k,0)} * \mathbf{d}_{(1,1,0)} + u_{(k,1)} * \mathbf{d}_{(0,2,0)} + u_{(k,2)} * \mathbf{d}_{(0,1,1)}, \\ \mathbf{w}_{(0,0,1)}^{(1)} &= u_{(k,0)} * \mathbf{w}_{(1,0,1)}^{(0)} + u_{(k,1)} * \mathbf{w}_{(0,1,1)}^{(0)} + u_{(k,2)} * \mathbf{w}_{(0,0,2)}^{(0)}, \\ &= u_{(k,0)} * \mathbf{d}_{(1,0,1)} + u_{(k,1)} * \mathbf{d}_{(0,1,1)} + u_{(k,2)} * \mathbf{d}_{(0,0,2)}, \\ f(\mathbf{b}_{(3-j,j)}, \mathbf{b}_{(3-k,k)}) &= u_{(j,0)} * \mathbf{w}_{(1,0,0)}^{(1)} + u_{(j,1)} * \mathbf{w}_{(0,1,0)}^{(1)} + u_{(j,2)} * \mathbf{w}_{(0,0,1)}^{(1)} \end{aligned}$$

A partir de esto se obtiene

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{b}_{(0,3)}, \mathbf{b}_{(0,3)}) &= (0.0000 \quad 0.7000 \quad 0.4900) \\
 f(\mathbf{b}_{(1,2)}, \mathbf{b}_{(1,2)}) &= (0.5000 \quad 0.9000 \quad 1.0600) \\
 f(\mathbf{b}_{(1,2)}, \mathbf{b}_{(0,3)}) &= f(\mathbf{b}_{(0,3)}, \mathbf{b}_{(1,2)}) &= (0.2500 \quad 0.8000 \quad 0.6300) \\
 f(\mathbf{b}_{(2,1)}, \mathbf{b}_{(0,3)}) &= f(\mathbf{b}_{(0,3)}, \mathbf{b}_{(2,1)}) &= (0.2000 \quad 0.6000 \quad 0.3500) \\
 f(\mathbf{b}_{(2,1)}, \mathbf{b}_{(1,2)}) &= f(\mathbf{b}_{(1,2)}, \mathbf{b}_{(2,1)}) &= (0.4500 \quad 0.7000 \quad 0.6500) \\
 \\
 f(\mathbf{b}_{(2,1)}, \mathbf{b}_{(2,1)}) &= (0.4000 \quad 0.5000 \quad 0.4100) \\
 f(\mathbf{b}_{(3,0)}, \mathbf{b}_{(0,3)}) &= f(\mathbf{b}_{(0,3)}, \mathbf{b}_{(3,0)}) &= (0.0000 \quad 0.3500 \quad 0.0000) \\
 f(\mathbf{b}_{(3,0)}, \mathbf{b}_{(1,2)}) &= f(\mathbf{b}_{(1,2)}, \mathbf{b}_{(3,0)}) &= (0.2500 \quad 0.4500 \quad 0.0000) \\
 f(\mathbf{b}_{(3,0)}, \mathbf{b}_{(2,1)}) &= f(\mathbf{b}_{(2,1)}, \mathbf{b}_{(3,0)}) &= (0.2000 \quad 0.2500 \quad 0.0000) \\
 f(\mathbf{b}_{(3,0)}, \mathbf{b}_{(3,0)}) &= (0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000)
 \end{aligned}$$

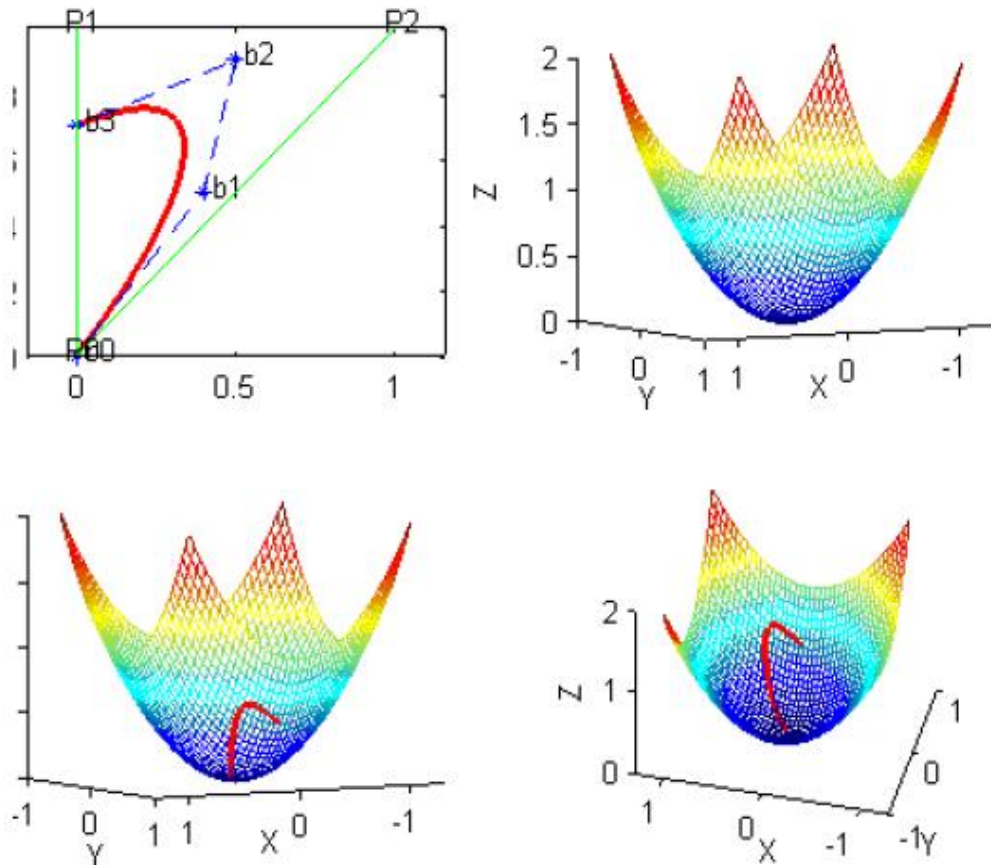
Finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{d}}_0 &= (0.0000, \quad 0.0000, \quad 0.0000) \\
 \tilde{\mathbf{d}}_1 &= (0.2000, \quad 0.2500, \quad 0.0000) \\
 \tilde{\mathbf{d}}_2 &= (0.3400, \quad 0.4800, \quad 0.2460) \\
 \tilde{\mathbf{d}}_3 &= (0.5400, \quad 0.8750, \quad 0.7800) \\
 \tilde{\mathbf{d}}_4 &= (0.3800, \quad 0.7800, \quad 0.7760) \\
 \tilde{\mathbf{d}}_5 &= (0.2500, \quad 0.8000, \quad 0.6300) \\
 \tilde{\mathbf{d}}_6 &= (0.0700, \quad 0.0000, \quad 0.4900)
 \end{aligned}$$

En la figura 3.3, se aprecia un instante del diseño de una curva sobre la superficie mediante la manipulación de los puntos de control de una curva

sobre el triángulo $\Delta F = \Delta P_0, P_1, P_2$, que facilita en gran medida el trabajo.

Figura 3.3 Diseñando una curva sobre una superficie mediante la composición de una superficie con una curva.



5. Conclusiones

Se ha obtenido la representación del blossom de un simplejo de Bézier y a partir de ellas se han deducido el Algoritmo de de Casteljau correspondiente.

Se ha obtenido una reformulación más detallada de un resultado sobre la composición de dos simplejos de Bézier. Se corrigen los errores tipográficos del resultado original y la notación utilizada en esta nueva presentación es más sencilla. La notación utilizada para los conjuntos de índices ha permitido un manejo más sencillo de los índices y representando una función mediante su blossom se ha obtenido una prueba más concisa.

Los puntos de control de la composición (F o g) de las representaciones de Bézier F y g pueden expresarse como una sumatoria, cuyos términos dependen del blossom de F y de los puntos de control de F y g. Se requiere evaluar el blossom de F en cualquier punto para lo cual se propone un algoritmo. Con representaciones de simplejos de Bézier se trabajan con representaciones afines, lo cual facilita la composición de una superficie y una curva de Bézier, en el sentido que en un inicio no se debe preocupar que se cumpla $\text{Rango}(g) \subset \text{Dom}(F)$.

En principio no es fácil el manejo de los índices en las representaciones de simplejos de Bézier, por la existencia de este inconveniente se propone un método del manejo de índices y almacenamiento óptimo de los puntos de control de los simplejos de Bézier.

Es factible el diseño de una curva sobre una superficie de Bézier, mediante la determinación dinámica de los puntos de control de la composición de la superficie que se mantiene fija y una curva móvil cuyos puntos de control son fáciles de manipular.

6. Referencias bibliográficas

- [Bez78] Bézier, P., General distortion of an ensemble of biparametric surfaces. *Computer-Aided design*, Vol. 10, N. 2, March 1978, pag. 116-120.
- [Boch 93] Boehm, W., An affine representation of de Casteljaus and de Boors rational algorithms, *Computer Aided Geometric Design* 10 (1993) 175-180.
- [DeRo 88] DeRose, T.D., Composing Bézier simplexes. *ACM Trans. Graph.* 7, 3 (July 1988), 198-221.
- [DeRo 93] DeRose, T.D.; Goldman, R. N.; Hagen, H.; Mann, S.; Funtional Composition Algorithms via Blossoming, *ACM Transaction on Graphics*, vol 12, N. 2, April 1993 Pages 113-135.
- [Far 86] Farin, G., Triangular Bernstein-Bézier patches. *Computer Aided Geometric Design* 3 (1986) 83-127.
- [Far 93] Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press Inc, San Diego (1993).
- [Hos 93] Hoschek, J., Lasser D., *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, A K Peteres Ltd. Wellesley, Massachusetts, 1993.
- [Las 93] Lasser, D., Composition of Tensor Product Bézier Representations. *Computing Suppl.* 8, 155-172 (1993).
- [Ram 87] Ramshaw, L., Blossoming A Connect-the-Dots Approach to Splines. Tech. Rep. 19, Digital Systems Research Center, Palo Alto, Calif., 1987.
- [Ram 89] Ramshaw, L., Blossoms are polar forms, *Computer Aided Geometric Design* 6 (1989) 323-358.
- [Sed 86] Sederberg, T.W., Parry, S. R., Free-Form Deformation of Solid Geometric Models. In *Proceedings of SIGGRAPH '86* (Aug. 1986). ACM, New York, 1986, pp.151-160.