Anales cientìficos UNALM Vol 70 N° 2, 2009
ISSN 0255-0407

Recibido: 11/05/2007
Aceptado: 19/10/2007

Problema de valor inicial para un sistema dispersivo no lineal de ondas largas regularizado

Aldo Mendoza U.[1]

Resumen

En este trabajo de investigación, estudiaremos el sistema de ecuaciones no lineales dispersivas bajo el efecto de disipación

$$\begin{cases} \left(1-\mu\partial_x^2\right)\partial_t u+\partial_x^3 u+\alpha\partial_x^3 v+u^p\partial_x u+v^p\partial_x v=0 \\ \left(1-\mu\partial_x^2\right)\partial_t v+\alpha\partial_x^3 u+\partial_x^3 v+v^p\partial_x v+\partial_x\left(uv^p\right)=0 \\ u(0)=\varphi \\ v(0)=\psi \end{cases}$$

donde $\mu>0, |\alpha|<1 y p\geq 1$, es un número entero.

Nuestro objetivo es demostrar que el sistema dispersivo o problema de Cauchy, esta bien formulado localmente y globalmente. Por esta razón vemos varias propiedades de las soluciones reales $u(x,),\upsilon(x,t)$ para $x\in\mathbf{R}$, $t\geq 0$.

Palabras clave:

Abstract

In this work of investigation, we will study the equations nonlinear system of dispersive under the dissipation effect

$$\begin{cases} \left(1-\mu\partial_x^2\right)\partial_t u+\partial_x^3 u+\alpha\partial_x^3 v+u^p\partial_x u+v^p\partial_x v=0 \\ \left(1-\mu\partial_x^2\right)\partial_t v+\alpha\partial_x^3 u+\partial_x^3 v+v^p\partial_x v+\partial_x\left(uv^p\right)=0 \\ u(0)=\varphi \\ v(0)=\psi \end{cases}$$

where $\mu>0, |\alpha|<1 yp\geq 1$, it is an integer number.

Our objective is to demonstrate that the dispersive system or the problem of Cauchy, is locally and globally good formulated. For this reason, we will see several properties of the real solutions $u(x,),\upsilon(x,t)$ for all $x\in\mathbf{R}$, $t\geq 0$.

Key words:

1. Introducción

Consideremos una familia de ecuaciones dispersivas bajo el efecto de disipación

$$\begin{cases} \left(1-\mu\partial_x^2\right)\partial_t u+\partial_x^3 u+\alpha\partial_x^3 v+u^p\partial_x u+v^p\partial_x v=0 \\ \left(1-\mu\partial_x^2\right)\partial_t v+\alpha\partial_x^3 u+\partial_x^3 v+v^p\partial_x v+\partial_x\left(uv^p\right)=0 \\ u(0)=\varphi \\ v(0)=\psi \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

Donde $\mu>0, |\alpha|<1$ son constantes reales, $u=u(x,t)$ y $\upsilon=\upsilon(x,t)$ son funciones con valores reales para $x\in\boldsymbol{R}, t\geq 0$ y $p\geq 1$ es un número entero.

Nuestro objetivo es estudiar varias propiedades de las soluciones reales u (x, t), v (x, t) del problema de Cauchy (P), en el espacio de Sobolev $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})=H^s(\mathbf{R})\times H^s(\mathbf{R})$, cuya norma es dada por

$$\|U\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{R})}=\|(u,v)\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{R})}=\sqrt{\|u\|^2_{H^s(\mathbf{R})}+\|v\|^2_{H^s(\mathbf{R})}},$$

para $s\geq 1$.

[1] Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Agraria La Molina. E-mail: amendoza@lamolina.edu.pe.

En primer lugar, demostraremos que (P) es bien formulado localmente en el sentido de Hadamard, es decir,

P1. Existencia local de soluciones: Se desea probar que existen $T\in\left]0,\overline{T}\right]$ y $U\in C\left([0,T],\mathbf{H}^s(\mathbf{R})\right)$ tal que satisface (P).

P2. Unicidad: Consiste en probar que existe a lo más una solución de (P) en alguna vecindad del origen.

P3. Dependencia continúa del dato inicial: Consiste en estudiar y establecer, si es posible, la continuidad de la aplicación $\Phi\mapsto U$ en topologías convenientes.

Para la cual, usaremos el teorema del punto .jo de Banach para demostrar que la ecuación integral asociada con el sistema tiene solución y luego mostramos que tal solución es la única solución del problema de Cauchy (P).

En segundo lugar, probaremos que (P) es bien formulado globalmente, es decir, se satisfacen (P1.), (P2.) y (P3.) para T = +∞ 1, para ello usaremos algunas estimativas a priori.

En esta sección se enunciaran las definiciones y propiedades básicas de transformada de Fourier, espacios de Sobolev, semigrupo de operadores y algunas desigualdades útiles que usaremos a lo largo de este trabajo de investigación.

La demostración de los teoremas y proposiciones enunciados se pueden consultar en [A-B], [I-I], [LP], [Me] y [MP2].

1.1. Transformada de Fourier.

Definición 1. Si $u \in L^1(R^1)$, la transformada de Fourier de u, se define como

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)\,dx$$

para todo $x \in R^n$ donde $\langle x,\xi\rangle = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_{n1}\xi_n$.

Proposición 2. El operador $\widehat{\cdot}: L^1(\mathbf{R}^n) \to C_\infty(\mathbf{R}^n)$ es una transformación lineal acotada con

$$\|\hat{u}\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n/2} \|u\|_{L^1}$$

Antes de enunciar la siguiente proposición describimos algunas notaciones. Un vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in N^n$ es llamado multi-índice. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, escribimos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha 1} x_3^{\alpha 2} \ldots x_n^{\alpha n}$$

y

$$D^{\alpha u}(x) = \frac{\partial|\alpha|}{\partial_{x_1}^{\alpha 1}\partial_{x_2}^{\alpha 2}\ldots\partial_{x_n}^{\alpha n}} u(x),$$

donde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

Proposición 3.

1. Si $u, v \in L^1(R^n)$ y $u * v(x) = \int_{R^n} u(x-y)v(y)dy$, para todo $x \in R^n$ es la convolución de u y υ, entonces

$$\widehat{u * v}(\xi) = (2\pi)^{n/2}\,\widehat{u}(\xi)\,\widehat{v}(\xi)$$

2. Para todo $u \in L^1(\mathbf{R}^n)$ y todo multi-índice $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tenemos

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha\,\widehat{u}(\xi)$$

Proposición 4. Si $u \in L^1(R^n) \cap L^2(R^n) x \in R^n$, entonces $\widehat{u} \in L^2(\mathbf{R}^n)$ y

$$\|\widehat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$$

2.2. Espacios de Sobolev H^s:

Los espacios de Sobolev $H^s(R)$, $s \in \mathbf{R}$, miden la diferenciabilidad de las funciones en $L^2(R)$ y son una herramienta fundamental en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales.

Definición 5. Sea $s \in \mathbf{R}$. Definimos el espacio de Sobolev de orden s, denotado por $H^s(R)$, como

$$H^s(\mathbf{R}) = \left\{ f \in S'(\mathbf{R}) : J^s f(\xi) = \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbf{R}) \right\}$$

con norma $\|\cdot\|_{s,2}$ definida como

$$\|f\|_{s,2} = \|J^s f\|_2 = \int_{\mathbf{R}} \left(1 + |\xi|^2\right)^s \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi$$

Teorema 6.

1. Si $0 \leq s \leq t$ entonces $H^t(R) \subset H^0(R)$ continuamente.

2. $H^s(R)$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle_s$ definido por

$$\langle f,g\rangle_{H^s} = \langle J^s f, J^s g\rangle_{L^2} = \int_{\mathbf{R}} J^s f(\xi)\,\overline{J^s g(\xi)}\,d\xi = \int_{\mathbf{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{g}(\xi)}\,d\xi,$$

donde $f, g \in H^s(\mathbf{R})$.

3. Para cualquier $s \in R$, el espacio de Schwartz S(**R**) es denso en H^s (**R**).

4. $\left|D^k f\right|_{H^s} \leq C|f|_{H^{s+k}}$

5. Si k ∈ $\mathbf{Z}^+$ entonces las normas $\|f\|_{s,2}$ y $\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial_x^\alpha f\|_2$ son equivalentes.

Teorema 7.

1. Si $s > \frac{1}{2} + k$ entonces H^s (**R**) está continuamente contenido en $C_\infty^k(\mathbf{R})$, el espacio de las funciones con k derivadas continuas que se anulan en el infinito. O sea, si $f \in H^s(R)$ con $s > \frac{1}{2} + k$, entonces $f \in C_\infty^k(\mathbf{R})$ y $\|f\|_{C^k} \leq C_s \|f\|_{s,2}$.

2. Si $s > \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ con p > 2 entonces H^s (**R**) está continuamente contenido en L^p (**R**), es decir, si $f \in H^s(R)$ y $p > 2$.

$$\|f\|_p \leq \|f\|_s$$

para $s > \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$.

2.3. Teoría de semigrupos.

En adelante X será un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_X$.

Definición 8. Un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach X es una familia $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ tal que

1. $\forall t \geq 0 : W(t) \in \mathcal{L}(X)$
2. W (0) = I, el operador identidad sobre X,
3. $\forall s, t \in [0,\infty\rangle : W(s+t) = W(s)\,W(t)$ y
4. $\lim_{t\to t_0} W(t)x = W(t_0)x$

Proposición 9. Sea $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo sobre X. Entonces existen $\varpi \geq 0$ y $C \geq 1$ tales que $\|W(t)\|_x \leq Ce^{\varpi t}$, para todo $t \geq 0$.

Definición 10. El generador (infinitesimal) del semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X es la aplicación A:D(A)⊂X→X donde

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{x - W(t)x}{t} \text{ existe en } X \right\}$$

y

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{x - W(t)x}{t}$$

es claro que D (A) es no vacio ya que 0 ∈ D(A). Un hecho notable es que D(A) es bastante grande.

Proposición 11. Si A es el generador de un semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ en X, entonces para todo x∈D (A) tenemos que W (t) x ∈ D (A) para todo t

$$\frac{d}{dt} W(t)x = AW(T)X = W(T)Ax$$

Proposición 12. Si X es un espacio de Banach y $A: D(A) \subset X \to X$ es el generador del semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X, entonces para todo $\varphi \in D(A)$, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) = \varphi \in \mathcal{D}(A), \end{cases}$$

tiene solución única

$$u \in C([0,+\infty[: \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,+\infty[: X)$$

dada por

$$u(t) = W(t)\varphi$$

2.4. Desigualdades útiles.

Proposición 13. Para todo $t \in \mathbf{R}$ existen $c_1 = c_1(t)$ y $c_2(t)$ constantes positivas tales que $c_1(1+x^t) \leq 1 + x^t \leq c_2(1+x^t)$ para todo $x \geq 0$.

Proposición 14. Sean $k \in L^1([a,b])$, $k(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$ y $f, g \in C([a,b])$ tales que

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) f(s)\, ds, \quad a \leq t \leq b$$

entonces

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) \exp\left[\int_a^s k(r)\, dr\right] g(s)\, ds, \quad a \leq t \leq b$$

si g (t) = constante, se sigue en particular que

$$f(t) \leq g \exp\left[\int_a^t k(s)\, ds\right], \quad a \leq t \leq b$$

Lema 15. . Si $s > \frac{3}{2}$ y $\phi \in H^s(\mathbf{R})$ entonces

$$\|\phi\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq 2\|\phi\|_0^{1/2} \|\partial_x \phi\|_0^{1/2} \leq 2\|\phi\|_0^{1/2} \|\phi\|_1^{1/2}$$

Teorema 16. Si $r \leq s \leq t$ tal que $s = (1-\theta)r + \theta t$, $\theta \in [0,1]$ entonces

$$\|u\|_s \leq C\|u\|_r^{1-\theta} \|u\|_t^{\theta}$$

Proposición 17. Si $s > \frac{n}{2} + 1$ y $t \geq 1$ entonces, existe $C_s = C(s,n,t) > 0$ tal que

$$|\langle u, v\partial_x u\rangle_t| \leq C_s \left\{ \|\partial_x v\|_{s-1} \|u\|_t^2 + \|\partial_x v\|_{t-1} \|u\|_s \|u\|_t \right\}$$

2. Materiales y métodos

2.1. El Problema Lineal

Ahora consideremos el problema lineal asociado con

$$\begin{cases} (1-\mu\partial_x^2)\partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha\partial_x^3 v = 0 \\ (1-\mu\partial_x^2)\partial_t v + \alpha\partial_x^3 u + \partial_x^3 v = 0 \\ u(0) = \varphi \\ v(0) = \psi \end{cases} \tag{PL}$$

o en forma vectorial 8

$$\begin{cases} L\partial_t U(t) + MU(t) = 0 \\ U(0) = \Phi. \end{cases} \tag{PL}$$

donde L es el operador de.nido por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(L) = \mathbf{H}^s(\mathbf{R}), \ s \in \mathbf{R} \\ LU = (u - \mu\partial_x^2 u, v - \mu\partial_x^2 v), \ U = (u,v) \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R}) \end{cases}$$

(3.1)

y M es el operador definido en (3.6).

Teorema 18. Si $s \geq 0$, entonces $L : \mathbf{H}^s(\mathbf{R}) \to \mathbf{H}^{s-2}(\mathbf{R})$ es un operador lineal biyectivo y para todo $V \in \mathbf{H}^{s-2}(\mathbf{R})$

$$\widehat{L^{-1}V}(\xi) = k(\xi)\widehat{V}(\xi)$$

donde $k(\xi) = \dfrac{1}{1+\mu\xi^2}$

Prueba. Es claro que L es un operador lineal. Si $U = (u,v) \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, $s \geq 0$, entonces usando integración por partes y la inclusión continua

$$\begin{aligned}
\|LU\|_{\mathbf{H}^{s-2}}^2 &= \|u - \mu\partial_x^2 u\|_{s-2}^2 + \|v - \mu\partial_x^2 v\|_{s-2}^2 \\
&= \|u\|_{s-2}^2 + \mu^2\|\partial_x^2 u\|_{s-2}^2 - 2\mu\langle u, \partial_x^2 u\rangle_{s-2} \\
&\quad + \|v\|_{s-2}^2 + \mu^2\|\partial_x^2 v\|_{s-2}^2 - 2\mu\langle v, \partial_x^2 v\rangle_{s-2} \\
&\leq \|u\|_{s-2}^2 + \mu^2\|u\|_s^2 + 2\mu\|\partial_x u\|_{s-2}^2 \\
&\quad + \|v\|_{s-2}^2 + \mu^2\|v\|_s^2 + 2\mu\|\partial_x v\|_{s-2}^2 .
\end{aligned}$$

(3.3)

Como $\mathbf{H}^s(\mathbf{R}) \hookrightarrow \mathbf{H}^{s-2}(\mathbf{R})$ continuamente y $\partial_x : \mathbf{H}^{s-1}(\mathbf{R}) \to \mathbf{H}^{s-2}(\mathbf{R})$ es un operador acotado, tenemos

$$\begin{aligned}
\|LU\|_{\mathbf{H}^{s-2}}^2 &\leq (1+\mu^2)\left(\|u\|_s^2 + \|v\|_s^2\right) + 2\mu\left(\|u\|_{s-1}^2 + \|v\|_{s-1}^2\right) \\
&\leq (1+\mu^2)\left(\|u\|_s^2 + \|v\|_s^2\right) + 2\mu\left(\|u\|_s^2 + \|v\|_s^2\right) \\
&= (1+\mu)^2\left(\|u\|_s^2 + \|v\|_s^2\right) \\
&= C\|U\|_{\mathbf{H}^s}^2 < \infty,
\end{aligned}$$

entonces $\mathcal{R}(L) \subseteq \mathbf{H}^{s-2}(\mathbf{R})$. Además, el operador L es inyectivo pues $\ker(L) = \{0\}$. Veamos la suryectividad del operador L, es decir, mostremos que dado $V = (u,v) \in \mathbf{H}^{s-2}(\mathbf{R})$ existe $U = (u_1, v_1) \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$. En efecto, de $(u_1 - \mu\partial_x^2 u_1, v_1 - \mu\partial_x^2 v_1) = (u,v)$, aplicando la transformada de Fourier respecto de la variable espacial se tiene $\widehat{u_1}(\xi) = \dfrac{\widehat{u}(\xi)}{1+\mu\xi^2}$ y y $\widehat{v_1}(\xi) = \dfrac{\widehat{v}(\xi)}{1+\mu\xi^2}$. Así,

$$\widehat{U}(\xi) = \left(\frac{\widehat{u}(\xi)}{1+\mu\xi^2}, \frac{\widehat{v}(\xi)}{1+\mu\xi^2}\right) = \frac{1}{1+\mu\xi^2}(\widehat{u}(\xi), \widehat{v}(\xi)) \equiv \frac{\widehat{V}(\xi)}{1+\mu\xi^2}.$$

(3.4)

Vamos a probar que $U \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$. Por la definición de norma en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, tenemos

$$\begin{aligned}\|U\|^2_{\mathbf{H}^s} &= \frac{1}{2\pi}\left(\|k*u\|_s^2+\|k*v\|_s^2\right)\\ &= \int_{\mathbf{R}}\left(1+\xi^2\right)^s\left(\left|\widehat{k}(\xi)\,\widehat{u}(\xi)\right|^2+\left|\widehat{k}(\xi)\,\widehat{v}(\xi)\right|^2\right)d\xi\\ &= \int_{\mathbf{R}}\frac{\left(1+\xi^2\right)^s}{\left(1+\mu\xi^2\right)^2}\left(|\widehat{u}(\xi)|^2+|\widehat{v}(\xi)|^2\right)d\xi.\end{aligned}$$

Si 0 < μ < 1, entonces $\dfrac{1}{1+\mu\xi^2}<\dfrac{1}{\mu\left(1+\xi^2\right)}$ y

$$\|U\|^2_{\mathbf{H}^s}<\frac{1}{\mu^2}\int_{\mathbf{R}}\left(1+\xi^2\right)^{s-2}\left(|\widehat{u}(\xi)|^2+|\widehat{v}(\xi)|^2\right)d\xi=\frac{1}{\mu^2}\|V\|^2_{\mathbf{H}^{s-2}}<\infty,$$

y cuando $\mu \geq 1$ se tiene $\dfrac{1}{1+\mu\xi^2}<\dfrac{1}{\mu\left(1+\xi^2\right)}$ y

$$\|U\|^2_{\mathbf{H}^s}\leq\int_{\mathbf{R}}\left(1+\xi^2\right)^{s-2}\left(|\widehat{u}(\xi)|^2+|\widehat{v}(\xi)|^2\right)d\xi=\|V\|^2_{\mathbf{H}^{s-2}}<\infty.$$

De lo anterior, existe $L^{-1}:\mathbf{H}^{s-2}(\mathbf{R})\to\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ y para $V\in\mathbf{H}^{s-2}(\mathbf{R})$ de (3.4) se tiene

$$\widehat{L^{-1}V}(\xi)=k(\xi)\,\widehat{V}(\xi)$$

en donde $k(\xi)=\dfrac{1}{1+\mu\xi^2}$.

Teorema 19. Si $s\geq 1$, el operador lineal $L^{-1}\partial_x:\mathbf{H}^s(\mathbf{R})\to\mathbf{H}^{s+1}(\mathbf{R})$ es acotado, es decir, existe C > 0 tal que

$$\left\|L^{-1}\partial_x U\right\|_{\mathbf{H}^{s+1}}\leq C\,\|U\|_{\mathbf{H}^s}\,. \qquad (3.5)$$

Prueba. Si $U=(u,v)\in\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ entonces

$$\begin{aligned}\left\|L^{-1}\partial_x U\right\|^2_{\mathbf{H}^{s+1}} &= \left\|k\widehat{\partial_x u}\right\|^2_{s+1}+\left\|k\widehat{\partial_x v}\right\|^2_{s+1}\\ &= \int_{\mathbf{R}}\left(1+\xi^2\right)^{s+1}|k(\xi)|^2\left(\left|\widehat{\partial_x u}(\xi)\right|^2+\left|\widehat{\partial_x v}(\xi)\right|^2\right)d\xi\\ &= \int_{\mathbf{R}}\frac{\left(1+\xi^2\right)^{s+1}}{\left(1+\mu\xi^2\right)^2}\xi^2\left(|\widehat{u}(\xi)|^2+|\widehat{v}(\xi)|^2\right)d\xi.\end{aligned}$$

Del mismo modo que en la demostración del teorema 18 tenemos que

$$\frac{\left(1+\xi^2\right)^{s+1}}{\left(1+\mu\xi^2\right)^2}<\frac{\left(1+\xi^2\right)^{s+1}}{\mu^2\left(1+\xi^2\right)^2}=C\left(1+\xi^2\right)^{s-1}$$

donde $C=\dfrac{1}{\mu^2}$ si $0<\mu<1$ y $C=1$ cuando $\mu\geq 1$. Por lo tanto, como $\xi^2<1+\xi^2$ entonces

$$\begin{aligned}\left\|L^{-1}\partial_x U\right\|^2_{\mathbf{H}^{s+1}} &\leq C\int_{\mathbf{R}}\left(1+\xi^2\right)^{s-1}\xi^2\left(|\widehat{u}(\xi)|^2+|\widehat{v}(\xi)|^2\right)d\xi\\ &\leq C\int_{\mathbf{R}}\left(1+\xi^2\right)^{s}\left(|\widehat{u}(\xi)|^2+|\widehat{v}(\xi)|^2\right)d\xi\\ &\leq C\,\|U\|^2_{\mathbf{H}^s}.\end{aligned}$$

Como $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})\hookrightarrow\mathbf{H}^{s-1}(\mathbf{R})$ continuamente, queda demostrada la desigualdad (3.5).

Consideremos ahora el operador

$$\begin{cases}\mathcal{D}(M)=\mathbf{H}^s(\mathbf{R}),\ s\in\mathbf{R}\\ MU=\left(\partial_x^3u+\alpha\partial_x^3v,\alpha\partial_x^3u+\partial_x^3v\right),\ U=(u,v)\in\mathbf{H}^s(\mathbf{R}).\end{cases}$$

(3.6)

Teorema 20. El operador lineal M definido en (3.6) tiene rango R(M) contenido en $\mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})$.

Prueba. Tenemos que $M:\mathbf{H}^s(\mathbf{R})\to\mathcal{R}(M)=\mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})$ pues

$$\begin{aligned}\|MU\|^2_{\mathbf{H}^{s-3}} &= \left\|\partial_x^3u+\alpha\partial_x^3v\right\|^2_{s-3}+\left\|\alpha\partial_x^3u+\partial_x^3v\right\|^2_{s-3}\\ &= \left\|\partial_x^3u\right\|^2_{s-3}+\alpha^2\left\|\partial_x^3v\right\|^2_{s-3}+2\alpha\left\langle\partial_x^3u,\partial_x^3v\right\rangle_{s-3}\\ &\quad+\alpha^2\left\|\partial_x^3u\right\|^2_{s-3}+\left\|\partial_x^3v\right\|^2_{s-3}+2\alpha\left\langle\partial_x^3u,\partial_x^3v\right\rangle_{s-3}\\ &\leq \left(1+\alpha^2\right)\left(\|u\|_s^2+\|v\|_s^2\right)+2\alpha\left(\left\|\partial_x^3u\right\|^2_{s-3}+\left\|\partial_x^3v\right\|^2_{s-3}\right)\\ &\leq \left(1+\alpha^2\right)\left(\|u\|_s^2+\|v\|_s^2\right)+2\alpha\left(\|u\|_s^2+\|v\|_s^2\right)\\ &\leq (1+\alpha)^2\left(\|u\|_s^2+\|v\|_s^2\right)\\ &= C\,\|U\|^2_{\mathbf{H}^s}<\infty,\end{aligned}$$

así que $\mathcal{R}(M)\subseteq\mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})$.

Teorema 21. El operador $-L^{-1}M:\mathbf{H}^s(\mathbf{R})\to\mathbf{H}^{s-1}(\mathbf{R})$ con $s\geq 1$ definido como multiplicador de Fourier por

$$\widehat{-L^{-1}MU}(\xi)=A(\xi)\,\widehat{U}(\xi)$$

donde

$$A(\xi)=\begin{pmatrix}\dfrac{i\xi^3}{1+\mu\xi^2} & \dfrac{i\alpha\xi^3}{1+\mu\xi^2}\\ \dfrac{i\alpha\xi^3}{1+\mu\xi^2} & \dfrac{i\xi^3}{1+\mu\xi^2}\end{pmatrix}$$

genera un semigrupo fuertemente continuo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre $\mathbf{H}^{s-1}(\mathbf{R})$ tal que

$$W(t)U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\left(S^+(t)+S^-(t)\right)u+\left(S^+(t)-S^-(t)\right)v\\ \left(S^+(t)-S^-(t)\right)u+\left(S^+(t)+S^-(t)\right)v\end{pmatrix},$$

(3.8)

para todo $U=(u,v)\in\mathbf{H}^{s-1}(\mathbf{R})$, en donde $S^{\pm}(t)$ son los multiplicadores de Fourier definidos por

$$\widehat{S^{\pm}(t)v}(\xi)=e^{\lambda^{\pm}(\xi)t}\widehat{v}(\xi)\quad con\ \lambda^{\pm}(\xi)=\frac{i\xi^3}{1+\xi^2}(1\pm|\alpha|).$$

Además, cualquiera sea $\Phi\in\mathbf{H}^{s-1}(\mathbf{R})$ la función $W_0(\cdot)\Phi:\mathbf{R}_0^+\to\mathbf{H}^{s-1}(\mathbf{R})$ es la única solución del problema de valor inicial (PL).

Prueba. Como $M:\mathbf{H}^s(\mathbf{R})\to\mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})$ es sobreyectivo y $L^{-1}:\mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})\to\mathbf{H}^{s-1}(\mathbf{R})$ pues $s\geq 1$, entonces $L^{-1}M:\mathbf{H}^s(\mathbf{R})\to\mathbf{H}^{s-1}(\mathbf{R})$.

Sea U = (u; v) 2 Hs (R), entonces por el teorema 19 tenemos

$$\begin{aligned}\left\|L^{-1}MU\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}} &= \left\|L^{-1}\left(\partial_x^3 u+\alpha\partial_x^3 v,\alpha\partial_x^3 u+\partial_x^3 v\right)\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}}\\ &= \left\|L^{-1}\partial_x\left(\partial_x^2 u+\alpha\partial_x^2 v,\alpha\partial_x^2 u+\partial_x^2 v\right)\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}}\\ &\leq C\left\|\left(\partial_x^2 u+\alpha\partial_x^2 v,\alpha\partial_x^2 u+\partial_x^2 v\right)\right\|_{\mathbf{H}^{s-2}}.\end{aligned}$$

Usando la definición de norma en $\mathbf{H}^{s-2}(\mathbf{R})$ y sus propiedades obtenemos,

$$\begin{aligned}\left\|L^{-1}MU\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}}^2 &\leq C\left\|\partial_x^2 u+\alpha\partial_x^2 v\right\|_{s-2}^2+C\left\|\alpha\partial_x^2 u+\partial_x^2 v\right\|_{s-2}^2\\ &= C\left(1+\alpha^2\right)\left(\left\|\partial_x^2 u\right\|_{s-2}^2+\left\|\partial_x^2 v\right\|_{s-2}^2\right)+4\alpha C\left\langle\partial_x^2 u,\partial_x^2 v\right\rangle_{s-2}\\ &\leq C\left(1+\alpha^2\right)\left(\|u\|_s^2+\|v\|_s^2\right)+2\alpha C\left\|\partial_x^2 u\right\|_{s-2}^2\left\|\partial_x^2 v\right\|_{s-2}^2\\ &\leq C\left(1+\alpha\right)^2\left(\|u\|_s^2+\|v\|_s^2\right)\\ &= C\|U\|_{\mathbf{H}^s}^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, L^{-1} es acotado, entonces $-L^{-1}$ es el generador de un semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre $\mathbf{H}^{s-1}(\mathbf{R})$.

Para demostrar (3.8), resolvemos el problema de valor inicial (PL) tomando la transformada de Fourier en la variable espacial, obteniendo el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en t,

$$\begin{cases}\partial_t\widehat{U}(\xi,t)=-\widehat{L^{-1}M}(\xi)\,\widehat{U}(\xi,t)\\ \widehat{U}(\xi,0)=\widehat{\Phi}(\xi)\end{cases}$$

donde

$$\widehat{U}(\xi,t)=\begin{pmatrix}\widehat{u}(t)\\ \widehat{v}(t)\end{pmatrix}\ \text{y}\ \ \widehat{\Phi}(\xi)=\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}\\ \widehat{\psi}\end{pmatrix}.$$

Como los valores propios de A(ξ) son

$$\lambda^{\pm}(\xi)=\frac{i\xi^3}{1+\mu\xi^2}\left(1\pm|\alpha|\right)$$

y los vectores propios asociados son

$$v^{\pm}=\begin{pmatrix}\pm 1\\ 1\end{pmatrix}$$

respectivamente. Entonces, si J es la forma canónica de Jordan de A(ξ), obtenemos

$$e^{tJ}=\begin{pmatrix}e^{\lambda^+(\xi)t} & 0\\ 0 & e^{\lambda^-(\xi)t}\end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\widehat{U}(\xi,t)=e^{A(\xi)t}\widehat{\Phi}(\xi)=Ce^{Jt}C^{-1}\widehat{\Phi}(\xi)$$

donde $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Entonces

$$\widehat{U}(\xi,t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{\lambda^+(\xi)t}+e^{\lambda^-(\xi)t} & e^{\lambda^+(\xi)t}-e^{\lambda^-(\xi)t}\\ e^{\lambda^+(\xi)t}-e^{\lambda^-(\xi)t} & e^{\lambda^+(\xi)t}+e^{\lambda^-(\xi)t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}\\ \widehat{\psi}\end{pmatrix}$$

Definiendo $\widehat{S^{\pm}v}(\xi,t)=e^{\lambda^{\pm}(\xi)t}\widehat{v}(\xi)$, por la proposición 6.1 de [MP2], obtenemos (3.8) y la última afirmación del teorema.

2.2. Buena formulación local del problema (P).

El problema de valor inicial (P) lo escribimos en forma vectorial

$$\begin{cases}L\partial_t U(t)+MU(t)+\partial_x F(U(t))=0\\ U(0)=\Phi;\end{cases}\tag{P}$$

donde U = (u, v), Φ = (u_0, v_0), donde L y M son los operadores definidos en (3.1) y (3.6), y

$$F(U(t))=\left(\frac{u^{p+1}(t)+v^{p+1}(t)}{p+1},\frac{v^{p+1}(t)}{p+1}+u(t)v^p(t)\right).$$

En esta sección demostraremos que el problema de valor inicial (P) es localmente bien formulado en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ si $s\geq 1$.

Notemos que si U es solución de (P), definiendo

$G(\tau)=W(t-\tau)U(\tau)$

donde $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo generado por □L□1M, teorema 20, y derivando el segundo miembro respecto de τ, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dG}{d\tau}(\tau) &= \partial_\tau W(t-\tau)U(\tau)+W(t-\tau)\partial_\tau U(\tau)\\ &= W(t-\tau)L^{-1}MU(\tau)\\ &\quad +W(t-\tau)\left[-L^{-1}MU(\tau)-L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\right]\\ &= -W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau)).\end{aligned}$$

Integrando desde 0 hasta t, tenemos

$$G(t)-G(0)=-\int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau$$

Como $G(0)=W(t)\Phi$ y $G(t)=U(t)$, entonces U es solución de la ecuación integral

$$U(t)=W(t)\Phi-\int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau$$

(EI)

Por lo tanto, toda solución de (P) es solución de (EI). Nos interesa saber si toda solución de (EI) es solución de (P), para esto, aplicaremos el teorema del punto fijo de Banach.

Teorema 22. Si $\Phi\in\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ con $s\geq 1$, existen $\overline{T}=\overline{T}\left(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}\right)>0$ y una función $U\in C\left(\left[0,\overline{T}\right],\mathbf{H}^s(\mathbf{R})\right)$ única solución real de la ecuación integral (EI).

Prueba. Para esto, si $\Phi\in\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, con $s\geq 1$ y $\Phi\neq 0$, $T\geq 0$ y $R>0$ definimos

$$\mathcal{E}(T,R)=\left\{V\in C\left([0,T],\mathbf{H}^s(\mathbf{R})\right):\sup_{t\in[0,T]}\|V(t)-W(t)\Phi\|_{\mathbf{H}^s}\leq R\right\}$$

con la métrica

$$d(U,V)=\sup_{t\in[0,T]}\|U(t)-V(t)\|_{\mathbf{H}^s}.$$

Es fácil ver que (ε (T, R), d) es un espacio métrico completo. Para $\Phi\in\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ fijo, definimos la aplicación Θ por

$$\Theta U(t)=W(t)\Phi-\int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau,\quad t\in[0,T],$$

(4.1)

cualquiera sea $U \in \mathcal{E}(T,R)$. Tenemos las siguientes propiedades de la aplicación Θ definida sobre ε (T, R).

1. Cualesquiera sean T > 0 y R > 0, la aplicación Θ está bien definida por (EI). En efecto, si $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ entonces $W(t)\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ pues por el teorema 21 $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ es el dominio del operador $-L^1 M$. Por otro lado, como $U(t) = (u(t), v(t)) \in H^s(\mathbf{R})$ entonces, desde que $H^s(\mathbf{R})$ es un álgebra de Banach pues $s \geq 1$, tenemos que u^{p+1}, v^{p+1}, uv^p y sus productos por escalares pertenecen a $H^s(\mathbf{R})$, de donde $F(U(\tau)) \in H^s(\mathbf{R})$ y $L^{-}\partial_x F(U(\tau)) \in H^{S+1}(\mathbf{R})$; por lo tanto, del teorema 21, $W(t-\tau)\partial_x F(U(\tau)) \in H^s(\mathbf{R})$ dado que $H^{S+1}(\mathbf{R}) \subset H^s(\mathbf{R})$. De ahí que $\int_0^t W_\mu(t-\tau) F(U(\tau))\, d\tau \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ y por lo tanto $\Theta U(t) \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ cualquiera sea $t \in [o,T]$.

2. La función $\Theta U : [0,T] \to \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ es continua. Para $t_0 \in]0,T]$ supongamos que $t < t_0$, de esta forma

$$
\begin{aligned}
\|\Theta U(t) - \Theta U(t_0)\|_{\mathbf{H}^s} \leq\ & \|W(t)\Phi - W(t_0)\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \\
& + \left\| \int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \right. \\
& \left. + \int_0^{t_0} W(t_0-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} \\
\leq\ & \|W(t)\Phi - W(t_0)\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \\
& + \int_0^t \|[W(t-\tau) - W(t_0-\tau)] L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\|_{\mathbf{H}^s}\, d\tau \\
& + \int_{t_0}^t \|W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\|_{\mathbf{H}^s}\, d\tau. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Por la continuidad fuerte del semigrupo de contracciones $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\left\|W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\right\|_{\mathbf{H}^s} &\leq \sup_{0\leq t\leq t_0} \left\|W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\right\|_{\mathbf{H}^s} \\
&\leq \sup_{0\leq t\leq t_0} \left\|L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\right\|_{\mathbf{H}^s} \\
&\leq \sup_{0\leq t\leq t_0} \|F(U(\tau))\|_{\mathbf{H}^s},
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\|\Theta U(t) - \Theta U(t_0)\|_{\mathbf{H}^s} \leq\ & \|W(t)\Phi - W(t_0)\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \\
& + \int_0^t \|[W(t-\tau) - W(t_0-\tau)] L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\|_{\mathbf{H}^s}\, d\tau \\
& + |t-t_0| \sup_{0\leq t\leq t_0} \|W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\|_{\mathbf{H}^s}. \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

El primer sumando del segundo miembro de (4.3) converge a cero cuando $t \to t_0^-$ por la continuidad de la aplicación $W(\cdot)\Phi : \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ mostrada en el teorema 21.

Lo mismo sucede con el segundo sumando de (4.3) por la misma razón y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. El último sumando converge trivialmente a cero cuando $t \to t_0^-$. Esto nos demuestra la continuidad de ΘU a la izquierda de t0. La continuidad a la derecha de t_o, y de ahí la continuidad de ΘU en t_0, sigue de manera análoga.
13

3. Existen $T_0 = T_0(\|\Phi\|_{H^s}) > 0$ y $R_0 = R_0(\|\Phi\|_{H^s}) > 0$ tales que la aplicación Θ definida sobre $\mathcal{E}(T_0, R_0)$ tiene rango $\mathcal{R}(\Theta)$ contenido en $\mathcal{E}(T_0, R_0)$. Sean $T_0 > 0$, $R_0 > 0$ y $U \in \mathcal{E}(T_0, R_0)$, entonces para $0 \leq t \leq T_0$

$$\begin{aligned}\|\Theta U(t)-W(t)\Phi\|_{\mathbf{H}^s} &\leq \int_0^t \left\|W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\right\|_{\mathbf{H}^s} d\tau \\ &\leq \int_0^t \|F(U(\tau))\|_{\mathbf{H}^s} d\tau \end{aligned} \tag{4.4}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\|FU(\tau)\|_{\mathbf{H}^s} &= \frac{1}{p+1}\left\|u^{p+1}(\tau)+v^{p+1}(\tau)\right\|_s+\frac{1}{p+1}\left\|v^{p+1}(\tau)+(p+1)u(\tau)v^p(\tau)\right\|_s \\ &\leq \frac{1}{p+1}\left[\|u(\tau)\|_s^{p+1}+2\|v(\tau)\|_s^{p+1}+(p+1)\|u(\tau)\|_s\|v(\tau)\|_s^p\right]\end{aligned}$$

y por la definición del espacio $\mathcal{E}(T_0,R_0)$

$$\|u(\tau)\|_s \leq \|u(\tau)-W(\tau)\Phi\|_{\mathbf{H}^s}+\|W(\tau)\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \leq R_0+\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \tag{4.5}$$

y del mismo modo

$$\|v(\tau)\|_s \leq R_0+\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}\,, \tag{4.6}$$

entonces

$$\|FU(\tau)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \frac{p+4}{p+1}\left(R_0+\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}\right)^{p+1}.$$

Luego, en (4.4) resulta

$$\|\Theta U(t)-W(t)\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \leq \frac{p+4}{p+1}\left(R_0+\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}\right)^{p+1} t \leq \frac{p+4}{p+1}\left(R_0+\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}\right)^{p+1} T_0.$$

Eligiendo $R_0=\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}$ y $T_0=\dfrac{p+1}{2^{p+1}\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}^p(p+4)}$, obtenemos

$$\|\Theta U(t)-W(t)\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \leq R_0$$

para todo $t\in[0,T_0]$. Por lo tanto,

$$\sup_{0\leq t\leq T_0}\|\Theta U(t)-W(t)\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \leq R_0$$

de donde $\mathcal{R}(\Theta)\subseteq\mathcal{E}(T_0,R_0)$.

4. Existen $T_1=T_1(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s})>0$ y $R_1=R_1(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s})>0$ tales que la aplicación Θ: $\mathcal{E}(T_1,R_1)\to\mathcal{E}(T_1,R_1)$ es una contracción. Sean $U=(u_1,v_1)$ y $V=(u_2,v_2)$.

$$\begin{aligned}\|(\Theta U)(t)-(\Theta V)(t)\|_{\mathbf{H}^s} &= \left\|-\int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau \right.\\ &\qquad \left. +\int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(V(\tau))\right\|_{\mathbf{H}^s} d\tau \\ &\leq \int_0^t \left\|W(t-\tau)L^{-1}\partial_x[F(V(\tau))-F(U(\tau))]\right\|_{\mathbf{H}^s} d\tau \\ &\leq \int_0^t \|W(t-\tau)\|_{\mathbf{H}^s}\left\|L^{-1}\partial_x[F(V(\tau))-F(U(\tau))]\right\|_{\mathbf{H}^s} d\tau \\ &\leq C\int_0^t \|W(t-\tau)\|_{\mathbf{H}^s}\|F(V(\tau))-F(U(\tau))\|_{\mathbf{H}^{s-1}} d\tau \\ &\leq C\int_0^t \|F(V(\tau))-F(U(\tau))\|_{\mathbf{H}^{s-1}} d\tau.\end{aligned}$$

Como,

$$
\begin{aligned}
& \left\|F\left(V\left(\tau\right)\right)-F\left(U\left(\tau\right)\right)\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}} \\
= \ & \frac{1}{p+1}\left\|u_2^{p+1}\left(\tau\right)+v_2^{p+1}\left(\tau\right)-u_1^{p+1}\left(\tau\right)-v_1^{p+1}\left(\tau\right),\right. \\
& \qquad \left. v_2^{p+1}\left(\tau\right)-v_1^{p+1}\left(\tau\right)+\left(p+1\right)\left(u_2\left(\tau\right)v_2^p\left(\tau\right)-u_1\left(\tau\right)v_1^p\left(\tau\right)\right)\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}} \\
= \ & \frac{1}{p+1}\left\|u_1^{p+1}\left(\tau\right)-u_2^{p+1}\left(\tau\right)+v_1^{p+1}\left(\tau\right)-v_2^{p+1}\left(\tau\right)\right\|_{s-1} \\
& +\frac{1}{p+1}\left\|v_1^{p+1}\left(\tau\right)-v_2^{p+1}\left(\tau\right)+\left(p+1\right)\left(u_1\left(\tau\right)v_1^p\left(\tau\right)-u_2\left(\tau\right)v_2^p\left(\tau\right)\right)\right\|_{s-1} \quad (4.7)
\end{aligned}
$$

Estimamos

$$
\begin{aligned}
& \left\|u_1^{p+1}\left(\tau\right)-u_2^{p+1}\left(\tau\right)+v_1^{p+1}\left(\tau\right)-v_2^{p+1}\left(\tau\right)\right\|_{s-1} \\
\leq \ & \left\|u_1^{p+1}\left(\tau\right)-u_2^{p+1}\left(\tau\right)\right\|_s+\left\|v_1^{p+1}\left(\tau\right)-v_2^{p+1}\left(\tau\right)\right\|_s \\
\leq \ & \left\|u_1\left(\tau\right)-u_2\left(\tau\right)\right\|_s\left\|\sum_{j=0}^{p}u_1^{p-j}\left(\tau\right)u_2^j\left(\tau\right)\right\|_s+\left\|v_1\left(\tau\right)-v_2\left(\tau\right)\right\|_s\left\|\sum_{j=0}^{p}v_1^{p-j}\left(\tau\right)v_2^j\left(\tau\right)\right\|_s \\
\leq \ & C\left\|u_1\left(\tau\right)-u_2\left(\tau\right)\right\|_s\sum_{j=0}^{p}\left\|u_1\left(\tau\right)\right\|_s^{p-j}\left\|u_2\left(\tau\right)\right\|_s^j+C\left\|v_1\left(\tau\right)-v_2\left(\tau\right)\right\|_s\sum_{j=0}^{p}\left\|v_1\left(\tau\right)\right\|_s^{p-j}\left\|v_2\left(\tau\right)\right\|_s^j \\
\leq \ & C\left\|u_1\left(\tau\right)-u_2\left(\tau\right)\right\|_s\sum_{j=0}^{p}\left(R+\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}\right)^p+C\left\|v_1\left(\tau\right)-v_2\left(\tau\right)\right\|_s\sum_{j=0}^{p}\left(R+\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}\right)^p \\
= \ & C\left(p+1\right)\left(R+\left\|\Phi\right\|_s\right)^p\left(\left\|u_1\left(\tau\right)-u_2\left(\tau\right)\right\|_s+\left\|v_1\left(\tau\right)-v_2\left(\tau\right)\right\|_s\right) \\
= \ & C\left(p+1\right)\left(R+\left\|\Phi\right\|_s\right)^p\left\|U\left(\tau\right)-V\left(\tau\right)\right\|_{\mathbf{H}^s} \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

en donde se ha considerado (4.5) y (4.6). Además

$$
\begin{aligned}
& \left\|v_1^{p+1}\left(\tau\right)-v_2^{p+1}\left(\tau\right)+\left(p+1\right)\left(u_1\left(\tau\right)v_1^p\left(\tau\right)-u_2\left(\tau\right)v_2^p\left(\tau\right)\right)\right\|_{s-1} \\
\leq \ & \left\|v_1^{p+1}\left(\tau\right)-v_2^{p+1}\left(\tau\right)+\left(p+1\right)\left(u_1\left(\tau\right)v_1^p\left(\tau\right)-u_2\left(\tau\right)v_2^p\left(\tau\right)\right)\right\|_s \\
\leq \ & \left\|v_1^{p+1}\left(\tau\right)-v_2^{p+1}\left(\tau\right)\right\|_s+\left\|\left(p+1\right)\left(u_1\left(\tau\right)v_1^p\left(\tau\right)-u_2\left(\tau\right)v_2^p\left(\tau\right)\right)\right\|_s \\
\leq \ & \left\|v_1^{p+1}\left(\tau\right)-v_2^{p+1}\left(\tau\right)\right\|_s+\left(p+1\right)\left\|v_1^p\left(\tau\right)-v_2^p\left(\tau\right)\right\|_s\left\|u_1\left(\tau\right)\right\|_s \\
& \qquad +\left(p+1\right)\left\|u_1\left(\tau\right)-u_2\left(\tau\right)\right\|_s\left\|v_2^p\left(\tau\right)\right\|_s \\
\leq \ & C\left\|v_1\left(\tau\right)-v_2\left(\tau\right)\right\|_s\sum_{j=0}^{p}\left\|v_1\left(\tau\right)\right\|_s^{p-j}\left\|v_2\left(\tau\right)\right\|_s^j \\
& \qquad +C\left(p+1\right)\left\|v_1\left(\tau\right)-v_2\left(\tau\right)\right\|_s\sum_{j=0}^{p-1}\left\|v_1\left(\tau\right)\right\|_s^{p-1-j}\left\|v_2\left(\tau\right)\right\|_s^j\left\|u_1\left(\tau\right)\right\|_s \\
& \qquad +C\left(p+1\right)\left\|u_2\left(\tau\right)-u_1\left(\tau\right)\right\|_s\left\|v_2\left(\tau\right)\right\|_s^p \\
\leq \ & C\left\|v_1\left(\tau\right)-v_2\left(\tau\right)\right\|_s\sum_{j=0}^{p}\left(R+\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}\right)^p \\
& \qquad +C\left(p+1\right)\left\|v_1\left(\tau\right)-v_2\left(\tau\right)\right\|_s\sum_{j=0}^{p-1}\left(R+\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}\right)^p \\
& \qquad +C\left(p+1\right)\left\|u_2\left(\tau\right)-u_1\left(\tau\right)\right\|_s\left(R+\left\|\Phi\right\|_s\right)^p \\
\leq \ & C_p\left(p+1\right)\left(R+\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}\right)^p\left[\left\|v_1\left(\tau\right)-v_2\left(\tau\right)\right\|_s+\left\|u_2\left(\tau\right)-u_1\left(\tau\right)\right\|_s\right] \\
= \ & C_p\left(p+1\right)\left(R+\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}\right)^p\left\|U\left(\tau\right)-V\left(\tau\right)\right\|_{\mathbf{H}^s} \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, sustituyendo (4.7) y (4.8) en (4.6), obtenemos

$$\|F(U(\tau)) - F(V(\tau))\|_{\mathbf{H}^{s-1}} \leq C(R + \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s})^p \|U(\tau) - V(\tau)\|_{\mathbf{H}^s} \tag{4.10}$$

de donde

$$\begin{aligned} \|\Theta U(t) - \Theta V(t)\|_{\mathbf{H}^s} &\leq C(R_1 + \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s})^p t \|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} \\ &\leq C(R_1 + \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s})^p t d(U, V). \end{aligned}$$

Eligiendo $\overline{R} = \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}$ y tomando el supremo en $[0, T_1]$ obtenemos

$$d(\Theta U, \Theta V) = \sup_{0 \leq t \leq T_1} \|\Theta U(t) - \Theta V(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq C(R_1 + \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s})^p T_1 d(U, V).$$

Como

$$C(R_1 + \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s})^p T_1 \to 0 \text{ cuando } T_1 \to 0^+,$$

se sigue la existencia de T = T (k_kHs) 2]0; T1] tal que

$$0 < \lambda = C(R_1 + \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s})^p \overline{T} < 1$$

Así, concluimos que

$$d(\Theta U, \Theta V) \leq \lambda d(U, V) \text{ con } 0 < \lambda < 1,$$

y nos permite afirmar que lo que Θ es una contracción.

Por el teorema del punto fijo de Banach, existe una única $U \in \mathcal{E}(\overline{T}, \overline{R}) \subseteq C([0, \overline{T}], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ tal que _ $\Theta U = U$, es decir,

$$W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau) L^{-1} \partial_x F(U(\tau))\, d\tau = U(t)$$

para todo $t \in [0, \overline{T}]$.

A continuación demostraremos que la función U obtenida en el teorema 22, solución de la ecuación integral (EI), es la única solución de (P).

Teorema 23. Si $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ con $s \geq 1$, entonces existen $\overline{T} = \overline{T}(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}) > 0$ y una función $U \in C([0, \overline{T}], H^s(\mathbf{R}))$ con $\partial_t u \in C^1([0, \overline{T}], H^s(\mathbf{R}))$ tales que U es solución del problema (P).

Prueba. Dado $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, consideramos

$$U(t) = W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau) L^{-1} \partial_x F(U(\tau))\, d\tau.$$

Hagamos $U_L(t) = W(t)\Phi$ y $U_P(t) = \int_0^t W(t-\tau) L^{-1} \partial_x F(U(\tau))\, d\tau$ Luego, por el teorema 21, $U_L(t)$ es solución del problema lineal

$$\begin{cases} L\partial_t U_L(t) + MU_L(t) = 0 \\ U_L(0) = \Phi. \end{cases}$$

y U_p (t) es solución de

$$\begin{cases} L\partial_t U_P(t) + MU_P(t) - \partial_x F(U(t)) = 0 \\ U_P(0) = 0. \end{cases}$$

En efecto, es claro que $U_P(0) = 0$. Sea h > 0, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{U_P(t+h)-U_P(t)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} W(t+h-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau \right.\\
&\qquad \left. - \int_0^{t} W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau\right]\\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t} W(t+h-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau \right.\\
&\qquad + \int_t^{t+h} W(t+h-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau\\
&\qquad \left. - \int_0^{t} W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau\right]\\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t} (W(t+h-\tau)-W(t-\tau))L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau\\
&\qquad +\frac{1}{h}\int_t^{t+h} W(t+h-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau\\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t} (W(h)-I)W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau\\
&\qquad +\frac{1}{h}\int_t^{t+h} W(t+h-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau\\
&= \frac{W(h)-I}{h}\int_0^{t} W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau\\
&\qquad +\frac{1}{h}\int_t^{t+h} W(t+h-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau.
\end{aligned}$$

Tomando el limite cuando $h \to 0^+$, usando propiedades de límites y el teorema del valor medio para integrales de Bochner en el intervalo $[t,t+h]$ con $c_h \in [t,t+h]$, resulta

$$\begin{aligned}
\partial_t^+ U_P(t) &= -L^{-1}M\int_0^t W(t-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau + L^{-1}\partial_x F(U(t))\\
&= -L^{-1}MU_P(t) + L^{-1}\partial_x F(U(t)).
\end{aligned}$$

Para h < 0, procediendo de manera similar, se obtiene que

$$\partial_t^- U_P(t) = -L^{-1}MU_P(t) + L^{-1}\partial_x F(U(t)).$$

Entonces, $\partial_t^- U_P(t) = \partial_t^+ U_P(t)$, así que

$$\partial_t U_P(t) = -L^{-1}MU_P(t) + L^{-1}\partial_x F(U(t)).$$

Por lo tanto, U_P es solución de la ecuación

$$L\partial_t U_P(t) + MU_P(t) - \partial_x F(U(t)) = 0.$$

Así, $U = U_L - U_P$ es solución del problema de Cauchy (P). En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}
L\partial_t U(t) &= L\partial_t U_L(t) + L\partial_t U_P(t)\\
&= -MU_L(t) + [MU_P(t) - \partial_x F(U(t))]\\
&= -M[U_L(t) - U_P(t)] - \partial_x F(U(t))\\
&= -MU(t) - \partial_x F(U(t)).
\end{aligned}$$

Además $U(0) = U_L(0) - U_P(0) = \Phi$.

Veamos que $U \in C([0,\overline{T}], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ con $\partial_t U \in C([0,\overline{T}], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$. En efecto, por lo mostrado en la primera etapa de la prueba del teorema 22 y la forma como se define, $U = \Theta U$, tenemos que $U \in C([0,\overline{T}], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$. Por otro lado, dado que U es solución de la ecuación diferencial en (P), tenemos

$$\partial_t U(t) = -L^{-1}MU(t) - L^{-1}\partial_x F(U(t))$$

y hemos mostrado en la primera etapa de la prueba del teorema 22 que $L^{-1}MU(t) \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ y $-L^{-1}\partial_x F(U(t)) \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, lo cual nos indica que $\partial_t U(t) \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$. Por el Teorema de

Inmersión de Sobolev, se cumple $\mathbf{H}^s(\mathbf{R}) \hookrightarrow \mathbf{C}^0_\infty(\mathbf{R})$, de ahí que $\partial_t U \in C\left(\left[0,\overline{T}\right], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})\right)$. Es claro que obtuvimos existencia local, pero la unicidad vale solamente en $\mathcal{E}\left(\overline{T},\overline{R}\right)$ y no en $C\left(\left[0,\overline{T}\right], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})\right)$. Para esto, así como para obtener la dependencia continua con respecto al dato inicial, vamos a probar el siguiente resultado.

Teorema 24. Sean $\Phi, \Psi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ con $s \geq 1,\ T > 0\ y\ U, V \in C([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ soluciones de (P) tales que $U(0) = \Phi\ y\ V(0) = \Psi$. Entonces $\|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \|\Phi - \Psi\|_{\mathbf{H}^s} e^{CT}$ (4.11) para todo $t \in [0,T]$.

Prueba. Debido al teorema 23, existen $\overline{T}_\Phi > 0$ y $\overline{T}_\Psi > 0$ tales que $U \in C\left(\left[0,\overline{T}_\Phi\right], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})\right)$ satisfacen

$$U(t) = W(t)\Phi - \int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\, d\tau$$

y

$$V(t) = W(t)\Psi - \int_0^t W(t-\tau) L^{-1}\partial_x F(V(\tau))\, d\tau$$

para todo $t \in [0,T]$ siendo $T = \text{mín}\left\{\overline{T}_\Phi, \overline{T}_\Psi\right\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} &\leq \|W(t)\Phi - W(t)\Psi\|_{\mathbf{H}^s} + \int_0^t \left\|W(t-\tau) L^{-1}\partial_x [F(U(\tau)) - F(V(\tau))]\right\|_{\mathbf{H}^s} d\tau \\
&\leq \|\Phi - \Psi\|_{\mathbf{H}^s} + \int_0^t \|F(U(\tau)) - F(V(\tau))\|_{\mathbf{H}^{s-1}}\, d\tau. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Si $U = (u_1, v_1)$ y $V = (u_2, v_2)$, como en (4.5) y (4.6) tenemos

$$\|u_1(\tau)\|_s \leq 2\|\Phi\|_s \leq 2N$$

donde $N = \text{máx}\{\|\Phi\|_s, \|\Psi\|_s\}$ y del mismo modo

$$\|v_1(\tau)\|_s \leq 2N, \qquad \|u_2(\tau)\|_s \leq 2N \quad \text{y} \quad \|v_2(\tau)\|_s \leq 2N.$$

Procediendo como en (4.7), (4.8) y (4.9)

$$\begin{aligned}
&\|F(U(\tau)) - F(V(\tau))\|_{\mathbf{H}^{s-1}} \\
\leq\ & \frac{1}{p+1}\left\|u_1^{p+1}(\tau) - u_2^{p+1}(\tau) + v_1^{p+1}(\tau) - v_2^{p+1}(\tau)\right\|_{s-1} \\
& + \frac{1}{p+1}\left\|v_1^{p+1}(\tau) - v_2^{p+1}(\tau) + (p+1)\left(u_1(\tau)v_1^p(\tau) - u_2(\tau)v_2^p(\tau)\right)\right\|_{s-1} \\
\leq\ & 2^p N^p C_s (\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_s + \|v_1(\tau) - v_2(\tau)\|_s \\
& + \|v_1(\tau) - v_2(\tau)\|_s + \|u_2(\tau) - u_1(\tau)\|_s) \\
\leq\ & 2^{p+1}(p+1) N^p C_s \|U(\tau) - V(\tau)\|_{\mathbf{H}^s}.
\end{aligned}$$

Luego, sustituyendo en (4.12),

$$\|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \|\Phi - \Psi\|_{\mathbf{H}^s} + 2^{p+1} N^p C_s \int_0^t \|U(\tau) - V(\tau)\|_{\mathbf{H}^s}\, d\tau,$$

Usando la desigualdad de Gronwall se tiene

$$\begin{aligned}
\|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} &\leq \|\Phi - \Psi\|_{\mathbf{H}^s} \exp\left(2^{p+1} N^p C_s t\right) \\
&\leq \|\Phi - \Psi\|_{\mathbf{H}^s} e^{CT},
\end{aligned}$$

lo que prueba el teorema.

Corolario 25. Si $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R}),\ s \geq 1$, existen $T = T(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}) > 0\ y\ U \in C([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ con $\partial_t U \in C([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$, única solución de (P).

Prueba. Consideremos dos soluciones U y V del problema (P), con datos iniciales $U(0) = \Phi = V(0)$. Entonces, en (4.11) tenemos

$$\|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \|\Phi - \Phi\|_{\mathbf{H}^s} e^{CT} = 0$$

para todo $t \in [0, T]$. Así queda probada la unicidad local.

2.3. Buena formulación Global del problema (P).

En el teorema 23 y en el corolario 25, hemos visto que si $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ con $s \geq 1$, el problema

$$\begin{cases} L\partial_t U(t) + MU(t) + \partial_x F(U(t)) = 0 \\ U(0) = \Phi \end{cases}$$

tiene única solución local $U \in C([0, T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$. En la primera parte de esta sección, para el problema no lineal (P) mostraremos que tal solución se puede extender a una solución global siempre que $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ con $s \geq 2$; para esto, mostraremos en la proposición (27) que $\|U(\cdot, t)\|_{\mathbf{H}^s}$ es acotada en [0, T]. Luego, en la segunda parte, usando la idea de T. Benjamin, J. Bona y J. Mahomy [B-B-M], demostraremos en el teorema (29) la dependencia continua de la solución respecto del dato inicial.

3.3.1. Existencia y unicidad de la solución Global.

Iniciamos esta primera parte notando lo siguiente.

Proposición 26. Sean $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, con $s \geq 2$, y U solución del problema (P) definida sobre [0, T]. Entonces

$$\|U(t)\|_1^2 \leq C(\mu) \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}^2$$

para cada $t \in [0, T]$.

Prueba. Para $t \in [0, T]$ tenemos

$$\langle U(t), L\partial_t U(t) + MU(t) + \partial_x F(U(t)) \rangle_{\mathbf{L}^2} = 0,$$

de donde

$$\langle U(t), L\partial_t U(t) \rangle_{\mathbf{L}^2} + \langle U(t), MU(t) \rangle_{\mathbf{L}^2} + \langle U(t), \partial_x F(U(t)) \rangle_{\mathbf{L}^2} = 0.$$

Pero

$$\frac{d}{dt} \langle U(t), LU(t) \rangle_{\mathbf{L}^2} = 2 \langle U(t), \partial_t LU(t) \rangle_{\mathbf{L}^2} = 2 \langle U(t), L\partial_t U(t) \rangle_{\mathbf{L}^2}, \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} \langle U(t), MU(t) \rangle_{\mathbf{L}^2} &= \left\langle (u, v), \left(\partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v, \alpha \partial_x^3 u + \partial_x^3 v \right) \right\rangle_{\mathbf{L}^2} \\ &= \left\langle u, \partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v \right\rangle_{L^2} + \left\langle v, \alpha \partial_x^3 u + \partial_x^3 v \right\rangle_{L^2} \\ &= \left\langle u, \partial_x^3 u \right\rangle_{L^2} + \alpha \left\langle u, \partial_x^3 v \right\rangle_{L^2} + \alpha \left\langle v, \partial_x^3 u \right\rangle_{L^2} + \left\langle v, \partial_x^3 v \right\rangle_{L^2} \\ &= 0 + \alpha \left\langle u, \partial_x^3 v \right\rangle_{L^2} - \alpha \left\langle \partial_x^3 v, u \right\rangle_{L^2} + 0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

y

$$\begin{aligned} \langle U(t), \partial_x F(U(t)) \rangle_{\mathbf{L}^2} &= \langle (u, v), (u^p \partial_x u + v^p \partial_x v, v^p \partial_x v + \partial_x (uv^p)) \rangle_{\mathbf{L}^2} \\ &= \langle u, u^p \partial_x u + v^p \partial_x v \rangle_{L^2} + \langle v, v^p \partial_x v + \partial_x (uv^p) \rangle_{L^2} \\ &= \langle u, u^p \partial_x u \rangle_{L^2} + \langle u, v^p \partial_x v \rangle_{L^2} + \langle v, v^p \partial_x v \rangle_{L^2} + \langle v, \partial_x (uv^p) \rangle_{L^2} \\ &= 0 + \langle u, v^p \partial_x v \rangle_{L^2} + 0 - \langle \partial_x v, uv^p \rangle_{L^2} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde hemos usado

$$\langle u, u^p \partial_x u \rangle_{L^2} = \left\langle u^{p+1}, \partial_x u \right\rangle_{L^2} = -\left\langle \partial_x u^{p+1}, u \right\rangle_{L^2} = -(p+1) \langle u^p \partial_x u, u \rangle_{L^2}$$

de donde

$$\langle u, u^p \partial_x u \rangle_{L^2} = 0$$

y del mismo modo $\langle v, v^p \partial_x v \rangle_{L^2} = 0$.
Reemplazando (5.4), (5.5) y (5.6) en (5.3) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \langle U(t), LU(t) \rangle_{\mathbf{L}^2} = 0.$$

Integrando la última expresión, para $t \in [0, T]$, resulta

$$\int_0^t \frac{d}{dr} \langle U(r), LU(r) \rangle_{\mathbf{L}^2} = \langle U(t), LU(t) \rangle_{\mathbf{L}^2} - \langle \Phi, L\Phi \rangle_{\mathbf{L}^2}.$$

Pero

$$\begin{aligned}
\langle U(t), LU(t) \rangle_{\mathbf{L}^2} &= \left\langle (u, v), \left(u - \mu\partial_x^2 u, v - \mu\partial_x^2 v\right) \right\rangle_{\mathbf{L}^2} \\
&= \left\langle u, \left(1 - \mu\partial_x^2\right) u \right\rangle_{L^2} + \left\langle v, \left(1 - \mu\partial_x^2\right) v \right\rangle_{L^2} \\
&= \left\langle \widehat{u}, \left(1 + \mu |\cdot|^2\right) \widehat{u} \right\rangle_{L^2} + \left\langle \widehat{v}, \left(1 + \mu |\cdot|^2\right) \widehat{v} \right\rangle_{L^2} \\
&\geq C \left\langle \widehat{u}, \left(1 + |\cdot|^2\right) \widehat{u} \right\rangle_{L^2} + C \left\langle \widehat{v}, \left(1 + |\cdot|^2\right) \widehat{v} \right\rangle_{L^2} \\
&= C \left\langle \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{u}, \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{u} \right\rangle_{L^2} + C \left\langle \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{v}, \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{v} \right\rangle_{L^2} \\
&= C \left\langle \widehat{J^1 u}, \widehat{J^1 u} \right\rangle_{L^2} + C \left\langle \widehat{J^1 v}, \widehat{J^1 v} \right\rangle_{L^2} \\
&= C \left\| J^1 u \right\|_{L^2}^2 + C \left\| J^1 u \right\|_{L^2}^2 \\
&= \|u\|_1^2 + \|v\|_1^2 \\
&= \|U\|_1^2 .
\end{aligned}$$

donde se usó que para todo $\mu > 0$ y cualquier $\xi \in \mathbf{R}$ se cumple que $1 + \mu\xi^2 \geq C\left(1 + \xi^2\right)$.
También

$$\begin{aligned}
\langle \Phi, L\Phi \rangle_{\mathbf{L}^2} &= \left\langle (\varphi, \psi), \left(\varphi - \mu\partial_x^2 \varphi, \psi - \mu\partial_x^2 \psi\right) \right\rangle_{\mathbf{L}^2} \\
&= \left\langle \varphi, \varphi - \mu\partial_x^2 \varphi \right\rangle_{L^2} + \left\langle \psi, \psi - \mu\partial_x^2 \psi \right\rangle_{L^2} \\
&= \left\langle \widehat{\varphi}, \left(1 + \mu |\cdot|^2\right) \widehat{\varphi} \right\rangle_{L^2} + \left\langle \widehat{\psi}, \left(1 + \mu |\cdot|^2\right) \widehat{\psi} \right\rangle_{L^2} \\
&\leq \mu \left\langle \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{\varphi}, \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{\varphi} \right\rangle_{L^2} + \mu \left\langle \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{\psi}, \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{\psi} \right\rangle_{L^2} \\
&= \mu \left\langle \widehat{J^s \varphi}, \widehat{J^s \varphi} \right\rangle_{L^2} + \mu \left\langle \widehat{J^s \psi}, \widehat{J^s \psi} \right\rangle_{L^2} \\
&= \mu \left(\left\| J^s \varphi \right\|_s^2 + \left\| J^s \psi \right\|_s^2 \right) \\
&= \mu \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}^2 ,
\end{aligned}$$

donde usamos: $1 + \mu\xi^2 \leq \mu + \mu\xi^2 = \mu\left(1 + \xi^2\right) \leq \mu\left(1 + \xi^2\right)^s$ si $\mu \geq 1$ y $s \geq 1$.

Entonces como $\displaystyle\int_0^t \frac{d}{dr} \langle U(r), LU(r) \rangle_{\mathbf{L}^2} = 0$ resulta (5.2).

Proposición 27. Sean $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, con $s \geq 2$, y U la solución del problema (P) en [0, T]. Entonces $\|U(t)\|_{\mathbf{H}^s}$ es acotada sobre [0, T].

Prueba. Para $t \in [0, T]$ tenemos

$$\langle LU(t), L\partial_t U(t) + MU(t) + \partial_x F(U(t)) \rangle_{\mathbf{L}^2} = 0,$$

entonces

$$\langle LU(t), L\partial_t U(t) \rangle_{\mathbf{L}^2} + \langle LU(t), MU(t) \rangle_{\mathbf{L}^2} + \langle LU(t), \partial_x F(U(t)) \rangle_{\mathbf{L}^2} = 0 \tag{5.7}$$

pero

$$\frac{d}{dt}\|LU\|_{\mathbf{L}^2}^2=\frac{d}{dt}\langle LU(t),LU(t)\rangle_{\mathbf{L}^2}=2\langle LU(t),\partial_t LU(t)\rangle_{\mathbf{L}^2}=2\langle LU(t),L\partial_t U(t)\rangle_{\mathbf{L}^2},$$

así

$$\langle LU(t),L\partial_t U(t)\rangle_{\mathbf{L}^2}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|LU\|_{\mathbf{L}^2}^2 \quad (5.8)$$

también

$$\begin{aligned}
&\langle LU(t),MU(t)\rangle_{\mathbf{L}^2}\\
=&\ \left\langle\left(u-\mu\partial_x^2u,v-\mu\partial_x^2v\right),\left(\partial_x^3u+\alpha\partial_x^3v,\alpha\partial_x^3u+\partial_x^3v\right)\right\rangle_{\mathbf{L}^2}\\
=&\ \left\langle u-\mu\partial_x^2u,\partial_x^3u+\alpha\partial_x^3v\right\rangle_{L^2}+\left\langle v-\mu\partial_x^2v,\alpha\partial_x^3u+\partial_x^3v\right\rangle_{L^2}\\
=&\ \left\langle u,\partial_x^3u\right\rangle_{L^2}+\alpha\left\langle u,\partial_x^3v\right\rangle_{L^2}-\mu\left\langle\partial_x^2u,\partial_x^3u\right\rangle_{L^2}-\mu\alpha\left\langle\partial_x^2u,\partial_x^3v\right\rangle_{L^2}\\
&+\alpha\left\langle v,\partial_x^3u\right\rangle_{L^2}+\left\langle v,\partial_x^3v\right\rangle_{L^2}-\mu\alpha\left\langle\partial_x^2v,\partial_x^3u\right\rangle_{L^2}-\mu\left\langle\partial_x^2u,\partial_x^3u\right\rangle_{L^2}\\
=&\ \alpha\left\langle u,\partial_x^3v\right\rangle_{L^2}-\mu\alpha\left\langle\partial_x^2u,\partial_x^3v\right\rangle_{L^2}+\alpha\left\langle v,\partial_x^3u\right\rangle_{L^2}-\mu\alpha\left\langle\partial_x^2v,\partial_x^3u\right\rangle_{L^2}\\
=&\ \alpha\left\langle u,\partial_x^3v\right\rangle_{L^2}-\mu\alpha\left\langle\partial_x^2u,\partial_x^3v\right\rangle_{L^2}-\alpha\left\langle\partial_x^3v,u\right\rangle_{L^2}+\mu\alpha\left\langle\partial_x^3v,\partial_x^2u\right\rangle_{L^2}\\
=&\ 0 \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&\left|\langle LU(t),\partial_xF(U(t))\rangle_{\mathbf{L}^2}\right|\\
=&\ \left|\left\langle\left(u-\mu\partial_x^2u,v-\mu\partial_x^2v\right),\left(u^p\partial_xu+v^p\partial_xv,v^p\partial_xv+\partial_x(uv^p)\right)\right\rangle_{\mathbf{L}^2}\right|\\
\leq&\ \left|\left\langle u-\mu\partial_x^2u,u^p\partial_xu+v^p\partial_xv\right\rangle_{L^2}\right|+\left|\left\langle v-\mu\partial_x^2v,v^p\partial_xv+\partial_x(uv^p)\right\rangle_{L^2}\right|\\
\leq&\ \left\|u-\mu\partial_x^2u\right\|_{L^2}\left\|u^p\partial_xu+v^p\partial_xv\right\|_{L^2}+\left\|v-\mu\partial_x^2v\right\|_{L^2}\left\|v^p\partial_xv+\partial_x(uv^p)\right\|_{L^2}\\
\leq&\ \frac{1}{2}\left(\left\|u-\mu\partial_x^2u\right\|_{L^2}^2+\left\|u^p\partial_xu+v^p\partial_xv\right\|_{L^2}^2\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\left\|v-\mu\partial_x^2v\right\|_{L^2}^2+\left\|v^p\partial_xv+\partial_x(uv^p)\right\|_{L^2}^2\right)\\
\leq&\ \left\|u-\mu\partial_x^2u\right\|_{L^2}^2+\left\|v-\mu\partial_x^2v\right\|_{L^2}^2+\left\|u^p\partial_xu+v^p\partial_xv\right\|_{L^2}^2+\left\|v^p\partial_xv+\partial_x(uv^p)\right\|_{L^2}^2\\
=&\ \|LU\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|\partial_xF(U)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

reemplazando (5.8), (5.9) y (5.10) en (5.7) se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|LU\|_{\mathbf{L}^2}^2\leq\|LU\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|\partial_xF(U(t))\|_{\mathbf{L}^2}^2 \quad (5.11)$$

Como

$$\begin{aligned}
\|\partial_xF(U(t))\|_{\mathbf{L}^2}^2 =&\ \left\|u^p\partial_xu+v^p\partial_xv\right\|_{L^2}^2+\left\|v^p\partial_xv+\partial_x(uv^p)\right\|_{L^2}^2\\
=&\ \left\|u^p\partial_xu\right\|_{L^2}^2+\left\|v^p\partial_xv\right\|_{L^2}^2+2\left\langle u^p\partial_xu,v^p\partial_xv\right\rangle_{L^2}\\
&+\left\|v^p\partial_xv\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_x(uv^p)\right\|_{L^2}^2+2\left\langle v^p\partial_xv,\partial_x(uv^p)\right\rangle_{L^2}\\
\leq&\ \left\|u^p\partial_xu\right\|_{L^2}^2+2\left\|v^p\partial_xv\right\|_{L^2}^2+2\left\|u^p\partial_xu\right\|_{L^2}\left\|v^p\partial_xv\right\|_{L^2}\\
&+\left\|\partial_x(uv^p)\right\|_{L^2}^2+2\left\|v^p\partial_xv\right\|_{L^2}\left\|\partial_x(uv^p)\right\|_{L^2}
\end{aligned}$$

pero, usando la proposición 26, se sigue que

$$\|u^p\partial_x u\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbf{R}} |u|^{2p} |\partial_x u|^2\, dx \leq \|u\|_{L^\infty}^{2p} \|\partial_x u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_1^{2p} \|u\|_1^2 \leq \|U\|_1^{2p+2} \leq C\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}^{2p+2},$$

análogamente

$$\|v^p\partial_x v\|_{L^2}^2 \leq C\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}^{2p+2}$$

y

$$\|\partial_x(uv^p)\|_{L^2} \leq \|uv^p\|_1 \leq \|u\|_1 \cdot \|v\|_1^p \leq \|U\|_1 \|U\|_1^p = \|U\|_1^{p+1} \leq C\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}^{p+1}$$

por lo tanto

$$\|\partial_x F(U(t))\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}^{2p+2} \quad (5.12)$$

luego, reemplazando (5.12) en (5.11) se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|LU\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \|LU\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}^{2p+2}$$

integrando de 0 a t, para $t \in [0,T]$, obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(\|LU(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \|L\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2\right) \leq \int_0^t \|LU(r)\|_{\mathbf{L}^2}^2\, dr + C\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}^{2p+2}\, t$$

Hs t

equivalentemente

$$\|LU(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \|L\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2CT\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}^{2p+2} + 2\int_0^t \|LU(r)\|_{\mathbf{L}^2}^2\, dr \quad (5.13)$$

aplicando la desigualdad de Gronwall en (5.13) se tiene

$$\begin{aligned}\|LU(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq \left(\|L\Phi\|_2^2 + 2CT\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}^{2p+2}\right)\exp\left(\int_0^t 2dr\right)\\ &= \left(\|L\Phi\|_2^2 + 2CT\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}^{2p+2}\right)\exp(2t)\\ &\leq Ke^{2T}.\end{aligned} \quad (5.14)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\|LU(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= \left\|\left(u-\mu\partial_x^2 u, v-\mu\partial_x^2 v\right)\right\|_{\mathbf{L}^2}^2\\ &= \left\|u-\mu\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^2 + \left\|v-\mu\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^2\\ &= \int_{\mathbf{R}}\left|\widehat{u}(\xi) - \mu\widehat{\partial_x^2 u}(\xi)\right|^2 d\xi + \int_{\mathbf{R}}\left|\widehat{v}(\xi) - \mu\widehat{\partial_x^2 v}(\xi)\right|^2 d\xi\\ &= \int_{\mathbf{R}}(1+\mu\xi^2)^2|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbf{R}}(1+\mu\xi^2)^2|\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi\\ &\geq C\int_{\mathbf{R}}(1+\xi^2)^s|\widehat{u}(\xi,t)|^2 d\xi + C\int_{\mathbf{R}}(1+\xi^2)^s|\widehat{v}(\xi,t)|^2 d\xi\\ &= C\|u(t)\|_{H^s(\mathbf{R})}^2 + C\|v(t)\|_{H^s(\mathbf{R})}^2\\ &= \|U(t)\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{R})}^2.\end{aligned} \quad (5.15)$$

1

Luego de (5.14) y (5.15) resulta que

$$\|U(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq Ce^T$$

lo que prueba que $\|U(t)\|_{\mathbf{H}^s}$ es acotada sobre [0, T]._

Teorema 28. Si $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, para $s \geq 2$, entonces existe una función $U \in C^1([0,+\infty[\,,\mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ única solución del problema (P).

Como la norma $\|U\|_{\mathbf{H}^s}^2$ no crece con el tiempo, podemos extender la solución del problema (P) a cualquier intervalo de tiempo [0, T] en un número .nito de pasos, como lo mostramos a continuación:

Sabemos por el teorema 23, existe U solución del problema (P), en efecto, sean t y h tales que $t,\ t+h \in [0,T[$ entonces

$$\begin{aligned}
& \|U(x,t+h)-U(x,t)\|_{\mathbf{H}^s} \\
\leq\ & \|[W(t+h)-W(t)]\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \\
& +\left\|\int_0^{t+h} W(t+h-r)L^{-1}\partial_x F(U(r))\,dr-\int_0^t W(t-r)L^{-1}\partial_x F(U(r))\,dr\right\|_{\mathbf{H}^s} \\
\leq\ & \|[W(t+h)-W(t)]\Phi\|_{\mathbf{H}^s}+\int_t^{t+h}\left\|W(t+h-r)L^{-1}\partial_x F(U(r))\,dr\right\|_{\mathbf{H}^s} \\
& +\left\|(W(h)-I)\int_0^t W(t-r)L^{-1}\partial_x F(U(r))\,dr\right\|_{\mathbf{H}^s}
\end{aligned}$$

Luego

$$\|U(x,t+h)-U(x,t)\|_{\mathbf{H}^s}\to 0,$$

cuando h → 0. En consecuencia $U\in C([0,T[\,,\mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ y puede, por lo tanto, ser extendida a [0, T]. Ahora consideremos el problema

$$\begin{cases} L\partial_t V(t)+MV(t)+\partial_x F(V(t))=0 \\ \\ V(x,0)=U(x,T), \end{cases} \qquad \text{(P')}$$

por el teorema 23, existe $T^*>0$ y una única $V\in C([0,T^*],\mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ satisfaciendo (P'), definimos

$$\widetilde{U}(x,t)=\begin{cases} U(x,t)\ ,\ 0\leq t\leq T \\ \\ V(x,t-T), \quad T\leq t\leq T+T^* \end{cases}$$

observemos que $\widetilde{U}(0)=U(0)=\Phi$ y $\widetilde{U}(T)=V(0)=\Phi=U(T)$, $\widetilde{U}$ satisface las condiciones de (P.), de donde

$$L\partial_t\widetilde{U}+M\partial_x\widetilde{U}+\partial_x F\left(\widetilde{U}(t)\right)=0,$$

si $t\in[0,T[\cup]0,T^*]$. Además debido a la continuidad de $U(.,t)$ en $[0,T]$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\widetilde{U}(x,T)-\widetilde{U}(x,T-h)}{h} &= \frac{U(x,T)-U(x,T-h)}{h} \\
&= \frac{W(T)\Phi-W(T-h)\Phi}{h}-\frac{1}{h}\int_0^T W(T-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau \\
&\quad +\frac{1}{h}\int_0^{T-h} W(T-h-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau \\
&= W(T)\frac{I-W(-h)}{h}\Phi+\frac{W(-h)-I}{h}\int_0^{T-h} W(T-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_{T-h}^{T} W(T-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau.
\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando h → 0^+, usando propiedades de límite y el teorema del valor medio para integrales de Bochner en el intervalo $[T-h,T]$ con $C_h\in[T-h,T]$ resulta

$$\begin{aligned}
\partial_t^+\widetilde{U}(T) &= -W(T)L^{-1}M\Phi+L^{-1}M\int_0^T W(T-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau-L^{-1}\partial_x F(U(T)) \\
&= -L^{-1}M\left[W(T)\Phi-\int_0^T W(T-\tau)L^{-1}\partial_x F(U(\tau))\,d\tau\right]-L^{-1}\partial_x F(U(T)) \\
&= -L^{-1}MU(T)-L^{-1}\partial_x F(U(T)).
\end{aligned}$$

Para h < 0, procediendo de manera similar, se obtiene que

$$\partial_t^- \widetilde{U}(T) = -L^{-1}MU(T) - L^{-1}\partial_x F(U(T)).$$

Entonces $\partial_t^+ \widetilde{U}(T) = \partial_t^- \widetilde{U}(T)$, así que

$$\partial_t \widetilde{U}(x,T) + L^{-1}M\partial_x \widetilde{U}(x,T) + L^{-1}\partial_x F\left(\widetilde{U}(x,T)\right) = 0.$$

Esto muestra que U puede ser extendida como solución de (P) al intervalo $[0, T + T^*]$.

2.3.2. Dependencia Continua de la solución respecto al dato inicial.

Según el teorema 23, si $\Phi \in \mathbf{H}^s$, para $s \geq 2$, para cada T > 0 existe una función $U \in C^1([0,T],\boldsymbol{H}^s(\boldsymbol{R}))$ única solución del problema (P) con dato inicial Φ. Esta observación nos conduce a la dependencia continua de la solución respecto del dato inicial, como se muestra a continuación.

Teorema 29. Si $\Phi \in \mathbf{H}^s$, para $s \geq 2$, la única solución $U \in C^1([0,+\infty[\,,\mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ del problema (P) con dato inicial Φ depende continuamente de Φ. Es decir, si $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es una sucesión en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ convergente a Φ en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ y para cada $n \in \mathbf{N}$ la función $U_n \in C^1([0,+\infty[\,,\mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ es la única solución del problema (P) con dato inicial Φ_n, entonces para cada T > 0 se cumple

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|U_n(t) - U(t)\|_s = 0. \tag{6.1}$$

Prueba. Por el teorema 28, para cada $n \in \mathbf{N}$ y cada T > 0, las funciones U_n y U pertenecen a la clase $C^1([0,T],\mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$, entonces por la proposición 24, para todo $t \in [0,T]$ tenemos

$$\|U_n(t) - U(t)\|_s \leq \|\Phi_n - \Phi\|_s e^{KT},$$

de donde se sigue (6.1).

3. Conclusiones

Como hemos visto el problema de valor inicial (P) es bien formulado localmente y globalmente. También una pregunta importante que se debe responder en el estudio de (P), esta relacionado con el omportamiento asintótico, que consiste en estudiar si es que la solución global del problema (P) decae o explota cuando t → +∞, la respuesta a esta pregunta es un poco extensa, por lo que, la diferimos para otro trabajo de investigación.

4. Referencias bibliográficas

[A1] J. Albert. Dispersion of low energy waves for the generalized Benjamin-Bona-Mahomy equation. J. Di¤erential Equations 63 (1986), 117-134.

[A2] J. Albert. On the Decay of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahomy equation. J. Math. Anal. and Appl. 141 (1989), 527-537.

[A-B] T. Arbogast, J. Bona. Methods of applied mathematics. The university of Texas at Austin, (2005).

[B-B-M] T. Benjamin, J. Bona y J. Mahomy. Model equatios for long waves in nonlinear dispersive systems. Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A 272 (1972), 47-78.

[B-M] V. Bisobnin, G. Perla Menzala. Decay rates of the solutions of nonlinear dispersive equations. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 124A, (1231-1246), 1994.

[I-I] R. J. Iório, V. Iório. Equacoes diferenciais parciais: una introducao. Rio de Janeiro, IMPA/CNPq (1998).

[MP2] J. Montealegre, S. Petrozzi. Semigrupos de contracción y ecuaciones de evolución lineales. Reporte de investigación, N_6 Serie B, PUCP (1999).

[JM] J. Montealegre. La ecuación de Benjamin - Bona - Mahomy generalizada. Existencia de soluciones.Revista PRO - MATHEMATICA, PUCP, Volumen IX, N_6, 17-18 (1995).

[Me] A. Mendoza Uribe. Estudio Local del Problema de Valor Inicial Asociado con la Ecuación de Kortewegh-de Vries. Tesis de Maestría, PUCP 2003

[LP] Felipe Linares, Gustavo Ponce. Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.

[K4] T. Kato. Quase-linear equations of evolution with application to partial diferential equations,
Spectral theory and diferential equations, lectures notes in mathematics, Springer Verlag 448 (1975), 25-70.

[WV] Wagner Vieira Leite Nunes.O Problema de Cauchy global para ecuaciones dispersivas con coeficientes dependientes del tiempo. Tesis presentada para obtener del título de doctor en ciencias. Rio de Janeiro. IMPA- Brasil (1991).