

## MODELAMIENTO ESTOCÁSTICO DE LAS DESCARGAS DEL RÍO PISCO / PERÚ CON FINES DE APROVISIONAMIENTO HÍDRICO

### STOCHASTIC MODELING OF PISCO / PERU RIVER DISCHARGES FOR WATER SUPPLY PURPOSES

Sandra del Aguila Ríos<sup>1</sup> y Jesús Abel Mejía Marcacuzco<sup>2</sup>

#### Resumen

El modelamiento estocástico de las descargas de un río es importante porque permite predecir su comportamiento a futuro, constituyéndose en una herramienta en la gestión de los recursos hídricos. En ese sentido, el objetivo del trabajo fue modelar las descargas medias anuales del río Pisco / Ica / Perú con el programa MAR1 (Modelo autorregresivo de orden 1), a través del análisis de su serie temporal, para simular y cuantificar su disponibilidad como parte del Servicio Ecosistémico Hidrológico (SEH) de provisión para distintos usos. Los estadísticos de la serie, parámetros del modelo y el ajuste a distribuciones de probabilidad teóricas, se obtuvieron con el uso del programa MAR1, que es un código computacional en MATLAB R2016a desarrollado específicamente para este trabajo, con el cual se tabularon y graficaron las salidas de descargas de las sucesivas simulaciones realizadas. Los resultados indican que el modelo autorregresivo de orden 1, ajustado a la distribución Gamma, es el más apropiado para modelar las descargas anuales del río Pisco, porque reportan el menor valor de la raíz del menor error medio cuadrático (RMEC). Las pruebas de bondad de ajuste estadística y gráfica reportan igualdad entre estadísticos históricos y simulados, verificándose el principio de aleatoriedad en los residuos de las series simuladas. Además, en la evaluación de los SEH de provisión, se estimó la disponibilidad del agua superficial con fines de almacenamiento, comprobándose la tendencia a la disminución de los volúmenes de descarga del río Pisco.

**Palabras clave:** modelos estocásticos, modelos autorregresivos, simulación, recursos hídricos.

#### Abstract

Stochastic modeling of the discharges of a river is important because it allows predicting its behavior in the future, becoming a tool for managing water resources. In this sense, the objective of the work was to model the average annual discharges of the Pisco / Ica / Peru River using the program MAR1 - Autoregressive model of order 1, through the analysis of its time series, to simulate and quantify its availability as part of the Hydrological Ecosystem Service (SEH) of provision for different uses. The statistics of the series, parameters of the model and the adjustment to theoretical probability distributions, were obtained with the use of the MAR1 program, which is a computational code in MATLAB R2016a developed specifically for this work, with which the outputs of downloads were tabulated and graphed of the successive simulations carried out. The results indicate that the autoregressive model of order 1 adjusted to the Gamma distribution is the most appropriate to model the annual discharges of the Pisco River, because it reports the lowest value of the root of the mean square error (RSME). The tests of goodness of statistical and graphic adjustment report equality between historical and simulated statistics, verifying the principle of randomness in the residuals of the simulated series. In addition, in the evaluation of the provision SEH, the availability of surface water for storage purposes was estimated, demonstrating the tendency to decrease the discharge volumes of the Pisco River.

**Key words:** stochastic models, autoregressive models, simulation, water resources.

#### Introducción

En el mundo, el déficit de agua es producto del consumo total que se incrementa debido al crecimiento poblacional (Kummu *et al.*, 2016); asimismo, el 78% de agua suministrada a las grandes ciudades proviene de fuentes de agua superficial (lagos, manantiales y ríos) y sus cuencas de drenaje representan el 41% de la superficie terrestre (McDonald *et al.*, 2014). En el Perú,

la escasez de agua y variabilidad climática son preocupaciones fundamentales en muchas cuencas, particularmente en las de la vertiente del Pacífico, donde, a pesar de su intensa actividad económica y su alta densidad poblacional, solo cuenta con 1.8% de los recursos hídricos (Alcántara, 2015).

Un caso especial es el río Pisco, cuyo caudal depende de las precipitaciones que ocurren en su

cuenca alta y que es importante porque abastece a la principal actividad socio-económica que es la agricultura de exportación ubicada en el valle, dadas sus condiciones favorables de relieve, calidad agrológica de suelos y disponibilidad hídrica (INRENA, 2003).

Las descargas son fundamentales para la gestión de los recursos hídricos como herramienta para la conservación de los ecosistemas, de la biodiversidad y en adaptación al cambio climático (Bussettini, 2018), de allí la importancia de su estudio. Los Servicios Ecosistémicos Hidrológicos (SEH) de provisión son aquellos que las poblaciones obtienen directamente de los ecosistemas, así como de su transformación, tales como el agua, alimentos, madera, leña, medicinas, ornamentos, entre otros (Arellano & Ruiz, 2018).

En los problemas hidrológicos las soluciones se obtienen mediante modelos matemáticos de simulación hidrológica o modelos de series de tiempo que trabajan capturando los patrones en los datos históricos extrapolándolos al futuro (Loucks *et al.*, 2005). Actualmente, se aplican modelos estocásticos en complementar datos climáticos diarios observados, generar series largas de datos sintéticos para el análisis de riesgos y evaluar los posibles efectos a largo plazo de la antropogénesis del cambio climático (Wan *et al.*, 2005).

Los métodos de análisis de series de tiempo consideran el hecho de que los datos tomados en diversos periodos pueden tener algunas características de autocorrelación, tendencia o estacionalidad que se deben tener en cuenta para modelar el comportamiento de la serie observada (Aliaga, 1985). Un modelo es autorregresivo si la variable en el período *t* es explicada por las observaciones de ella misma correspondiente a períodos anteriores, adicionándose un término de error (Tealab, 2018). Por tanto, la base de los modelos autorregresivos es generar el presente o futuro en función de lo que ha ocurrido en el pasado (Alcántara *et al.*, 2014).

En este trabajo, la hipótesis planteada consideró la posibilidad de modelar estocásticamente las descargas medias anuales del río Pisco a través de un modelo autorregresivo ajustándolas a distribuciones estadísticas teóricas. El objetivo fue simular el comportamiento de las descargas medias anuales del río Pisco a través del análisis de series de tiempo utilizando modelos autorregresivos y ajustarlas a distribuciones teóricas de probabilidad para conocer su disponibilidad como SEH de aprovisionamiento.

**Materiales y Métodos**

Área de estudio

El estudio se llevó a cabo en la cuenca del río Pisco / Ica / Perú que posee una superficie de drenaje de 4 434.50 Km<sup>2</sup> con un 62.70% de cuenca húmeda, siendo la principal fuente de aprovisionamiento hídrico superficial (SEH), con ocurrencia de precipitaciones

estacionales. Esta disponibilidad fue evaluada en la sección de control de la estación hidrométrica Letrayoc, y sin considerar aporte de lagunas es 25.91 m<sup>3</sup>/s como valor medio anual histórico y 14.26 m<sup>3</sup>/s al 75% de probabilidad de no excedencia (INRENA, 2003).

Análisis de datos y ajuste a un modelo periódico autorregresivo estocástico

El modelamiento estocástico autorregresivo se aplicó a los datos de descargas medias anuales de la estación Letrayoc ubicada a 13°40' S, 75°46' O y 630 msnm. Los datos fueron proporcionados por la ATDR (Administración Técnica de Riego Chíncha - Pisco) con una longitud de registro de 72 años (Tabla 1), entre 1933 y 2004. El análisis de las descargas consistió en verificar consistencia, saltos, tendencias y cálculo de los estadísticos: media, máximos, mínimos, desviación estándar, coeficiente de sesgo, coeficiente de variación y coeficientes de correlación (Maidment, 1993). Como programa de cómputo principal se utilizó el MAR1 realizado en MATLAB R2016a, utilizándose programas complementarios como SAMS 2009, Hidroesta y hojas de cálculo Excel.

**Tabla 1.** Datos de descargas medias anuales del río Pisco en la estación Letrayoc (1933-2004).

Año	Q (m <sup>3</sup> /s)	Año	Q (m <sup>3</sup> /s)	Año	Q (m <sup>3</sup> /s)	Año	Q (m <sup>3</sup> /s)
1933	33.52	1951	33.92	1969	17.33	1987	16.81
1934	38.86	1952	28.25	1970	25.56	1988	22.98
1935	32.16	1953	36.34	1971	24.69	1989	32.90
1936	25.02	1954	31.47	1972	44.80	1990	6.40
1937	20.81	1955	34.86	1973	31.00	1991	16.56
1938	25.85	1956	26.79	1974	24.71	1992	4.18
1939	35.27	1957	23.83	1975	16.52	1993	32.63
1940	18.32	1958	14.61	1976	21.73	1994	32.24
1941	18.88	1959	28.36	1977	17.39	1995	33.43
1942	22.35	1960	21.35	1978	7.80	1996	26.28
1943	34.01	1961	41.90	1979	13.13	1997	10.87
1944	29.28	1962	33.13	1980	8.24	1998	54.87
1945	24.86	1963	35.54	1981	20.58	1999	26.05
1946	41.27	1964	15.49	1982	17.84	2000	27.85
1947	18.07	1965	13.25	1983	15.32	2001	30.56
1948	32.66	1966	21.89	1984	51.68	2002	28.64
1949	23.22	1967	51.48	1985	22.44	2003	24.97
1950	27.41	1968	13.93	1986	41.58	2004	17.07

Por tratarse de una estación, se utilizó un modelo autorregresivo periódico y univariado, calculándose los coeficientes de correlación mensual, graficando y visualizando el correlograma serial, así como la función de autocorrelación para la identificación de la forma del modelo (Del Aguila, 2001). El correlograma serial se graficó para un número de retardos (lags) de N/4, estableciendo los límites de confianza según la Fórmula 1.

$$LC = \frac{-1 \pm 1.96\sqrt{N-2}}{N-1}$$

**Fórmula 1.** Límites de Confianza para el correlograma.

Donde:

LC: límites de confianza;

N: número total de datos.

Los parámetros del modelo utilizado son:  $\mu_x$ ,  $\rho_{x,1}$ , ...,  $\rho_{x,1}$ , y  $\sigma^2\varepsilon$ , y se procesan según la Fórmula 2 (Salas & Yevjevich, 1972) modificada por Mejía (2017).

$$X_{i+1} = \mu_x + \rho_{x,1}(X_i - \mu_x) + \varepsilon_{i+1}$$

**Fórmula 2.** Procesamiento para los parámetros utilizados para el cálculo de la descarga en el año actual.

Donde:

$X_{i+1}$ : descarga en el año actual;

$\mu_x$ : media;

$\rho_{x,1}$ : primer coeficiente de autocorrelación;

$X_i$ : descarga del año anterior;

$\varepsilon_{i+1}$ : variable aleatoria normal no correlativa con media cero y varianza  $\sigma_\varepsilon^2$ .

#### Desarrollo de un código computacional en MATLAB

A través de la opción Modelamiento Matemático / Caja de Herramientas / Matemáticas Simbólicas del MATLAB R2016a, se plantearon los comandos y se definieron secuencialmente las funciones del modelo MAR1- Modelo Autorregresivo de orden 1 (Apéndice 1), basados en la teoría siguiente:

Generación de información de variable ajustada a la distribución normal: siendo  $X$  la variable descargas medias anuales, para la generación de información de  $X$  con distribución Normal, donde  $X$  se distribuye con  $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ , y  $\varepsilon$  debe ser  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , según el modelo (Fórmula 2); por lo tanto, valores aleatorios de  $X_{i+1}$  pueden ser generados tomando valores de  $\varepsilon_{i+1}$ . Si  $t$  es una variable aleatoria con  $N(0,1)$ , entonces  $t\sigma_\varepsilon = \sigma_x[1 - \rho_{x,1}^2]^{1/2}$  tiene distribución normal  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Así, el modelo de Markov de primer orden para generar información con  $(\mu_x, \sigma_x^2)$  está en la Fórmula 3 (Mejía, 2017).

$$X_{i+1} = \mu_x + \rho_{x,1}(X_i - \mu_x) + t_{i+1}\sigma_x\sqrt{1 - \rho_{x,1}^2}$$

**Fórmula 3.** Modelo de Markov.

En la generación de información con distribución Log-normal se utiliza el mismo modelo anterior, pero con aplicación de logaritmo natural, transformándose los datos originales ( $X_i$ ) a ( $Y_i$ ). Los valores de  $X_i$  se transforman en  $Y_i = \ln(X_i)$ . El modelo de generación Log-normal está dado por la Fórmula 4.

$$Y_{i+1} = \mu_Y + \rho_{Y,1}(Y_i - \mu_Y) + t_{i+1}\sigma_Y\sqrt{1 - \rho_{Y,1}^2}$$

**Fórmula 4.** Modelo de generación Log-normal.

Donde:  $\mu_Y$ ,  $\sigma_Y$  y  $\rho_{Y,1}$  representan la media, desviación estándar y coeficiente de correlación serial de primer orden de los logaritmos de los datos originales ( $Y$ ), respectivamente.

Modelo de generación de información con distribución Gamma: (Thomas & Fiering, 1962) propusieron el modelo de generación Gamma a partir del modelo de Markov de primer orden. El procedimiento consistió en definir  $C_\varepsilon$  como el coeficiente de asimetría de la componente aleatoria  $\varepsilon$  y pudo ser estimado por la Fórmula 5 (Mejía, 2017).

$$C_\varepsilon = \frac{(1 - \rho_{x,1}^3)C_X}{(1 - \rho_{x,1}^2)^{1.5}}$$

**Fórmula 5.** Coeficiente de Asimetría de  $\varepsilon$  (Mejía, 2017).

Donde:

$\rho_{x,1}$  y  $C_X$  son los coeficientes de correlación serial de primer orden y de asimetría, respectivamente, para los datos originales.

El elemento aleatorio  $\varepsilon_{i+1}$  está definido según la Fórmula 6.

$$\varepsilon_{i+1} = \frac{2}{C_\varepsilon} \left[ 1 + \frac{C_\varepsilon t_{i+1}}{6} - \frac{C_\varepsilon^2 t_{i+1}^3}{36} \right] - \frac{2}{C_\varepsilon}$$

**Fórmula 6.** Cálculo del elemento aleatorio  $\varepsilon_{i+1}$ .

Donde:

$t_{i+1}$ : Valor aleatorio con  $N(0,1)$ .

$X_{i+1}$  puede ser generado de acuerdo a la Fórmula 7.

$$X_{i+1} = \bar{X} + \rho_{X,1}(X_i - \bar{X}) + \varepsilon_{i+1}S_X\sqrt{1 - \rho_{X,1}^2}$$

**Fórmula 7.** Generación de  $X_{i+1}$ .

#### Bondad de ajuste, simulación de descargas y calibración del modelo

Para probar la bondad de ajuste del modelo MAR1 se utilizó el estadístico de Kolmogorov Smirnov, donde las hipótesis a contrastar fueron las siguientes:

$H_0$ : Las descargas anuales del río Pisco siguen una distribución Normal / Log-normal / Gamma

$H_1$ : Las descargas anuales del río Pisco NO siguen una distribución Normal / Log-normal / Gamma.

El estadístico de contraste de la prueba está dado por la Fórmula 8.

$$D_n = \max |P_{(x)} - P_{0(x)}|$$

**Fórmula 8.** Contraste de la máxima discrepancia.

Donde:

$P_{(x)}$ : frecuencia teórica relativa;

$P_{0(x)}$ : frecuencia observada relativa; y,

$D_n$ : máxima discrepancia de  $P_{(x)}$  y  $P_{0(x)}$ . Este valor se compara con el valor tabular de la distribución que se está probando, con un  $\alpha$  predeterminado de 0.05.

Se calculó el coeficiente de parsimonia (CP) para el MAR1, con la Fórmula 9 (Aliaga, 1985).

$$CP = \frac{\text{N}^\circ \text{ de datos}}{\text{N}^\circ \text{ Parámetros del modelo}}$$

**Fórmula 9.** Coeficiente de Parsimonia (CP) para el MAR1.

Se simularon 10 series de descargas medias anuales del río Pisco con el modelo MAR1 ajustadas a la distribución Normal, Log-normal y Gamma, respectivamente. Para verificar la distribución con mejor ajuste por cada simulación se realizó la cuantificación de la raíz del menor error medio cuadrático (RMEC) y el criterio de Schultz con las Fórmulas 10 y 11, respectivamente.

$$RMEC = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Q_{sim} - Q_{obs})^2}{n}}$$

**Fórmula 10.** Raíz del Menor Error Medio Cuadrático (RMEC).

$$D = 200 \frac{\sum_{i=1}^n |Q_{sim,i} - Q_i| Q_i}{n(Q_{max})^2}$$

**Fórmula 11.** Criterio de Schultz para verificar la distribución con mejor ajuste por cada simulación.

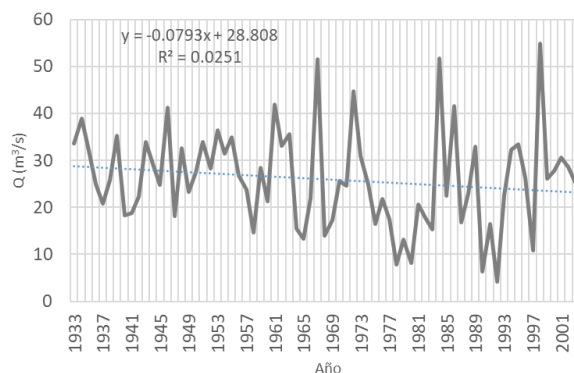
Para la calibración se utilizaron las pruebas de comparación estadística entre medias y desviaciones estándar de la serie original (histórica) y de las series simuladas, bajo la hipótesis de que ambas - histórica y simuladas - son estadísticamente iguales, con un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ . Se utilizó la prueba T de Student para la media y la prueba F de Fisher para la desviación estándar. También se realizó la comparación gráfica entre los estadísticos de las descargas históricas y generadas.

### Resultados y discusión

Las descargas medias anuales del río Pisco de una longitud de registro de 72 años resultaron consistentes a través del método estadístico: prueba T para la media y prueba F para la desviación estándar. El promedio

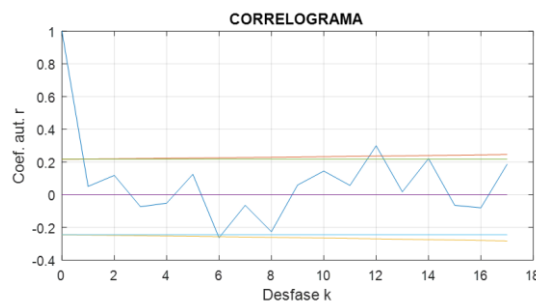
máximo y mínimo fue 54.87 m<sup>3</sup>/s y 4.18 m<sup>3</sup>/s en los años 1998 y 1992, respectivamente; desviación estándar de 10.48 m<sup>3</sup>/s; coeficiente de variación 0.4015 y coeficiente de sesgo igual a 0.4564.

Del análisis de la serie de tiempo de la Figura 1 se puede ver que los valores máximos corresponden a los megas fenómenos del Niño ocurridos en la costa peruana los años 1967, 1984 y 1998.



**Figura 1.** Serie de tiempo de descargas medias anuales del río Pisco en m<sup>3</sup>/s (1933-2004).

Respecto al correlograma de la Figura 2, no podemos afirmar que las descargas presentan estructura de dependencia, porque los valores se encuentran dentro del intervalo de confianza ( $LC_{sup} = 0.217$ ,  $LC_{inf} = -0.245$ ); sin embargo, dentro del ámbito del análisis de caudales anuales, la autocorrelación de retardo uno es la más frecuente y con ella es suficiente para expresar la dependencia serial de los datos (Salas *et al.*, 1997), con el adicional de cumplir con el principio estadístico de la parsimonia de parámetros. La cantidad de parámetros para el MAR1 anual es 3, siendo el número de datos 72 resultó un coeficiente de parsimonia de 24, mayor al número mínimo que es 15 (Aliaga, 1985). Según la literatura, es deseable la simplicidad, por lo que la orden del modelo y el número de parámetros debe ser pequeño (Roldán, 1994).

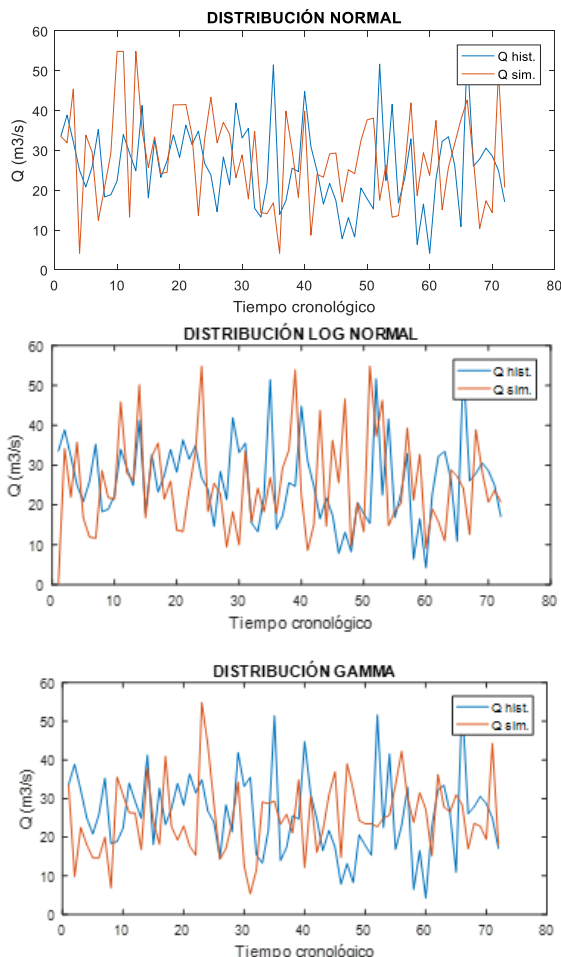


**Figura 2.** Correlograma serial.

El código matemático de formulación del programa MAR1 - Modelo Autorregresivo de Orden 1 (Apéndice 1) con una longitud de registro simulado de 72 años, fue utilizado para la generación de 10 series sintéticas (con motivo de comparación); dicho programa permite

graficar las salidas en cantidad ilimitada de veces y sus resultados tabularlos en hoja de cálculo Excel. Se confirmó la hipótesis de que es posible modelar estocásticamente las descargas medias anuales del río Pisco a través de un modelo autorregresivo tal como Obregón (1993), quien aplicó con éxito modelos autorregresivos en descargas medias mensuales del río Pisco en el período 1974 a 1988.

La metodología utilizada en este trabajo evidencia que las descargas anuales simuladas son estadísticamente iguales a las históricas, tal como lo reportaron Quispe *et al.* (2017) para el caso del río Ramis en Puno, Perú. Gráficamente, las descargas medias anuales del río Pisco ajustadas a la distribución Normal, Log-normal y Gamma con el programa MAR1 muestran un comportamiento estadísticamente igual a las descargas medias históricas observadas en el río Pisco basado en el análisis de la serie de tiempo de memoria larga (Figura 3).



**Figura 3.** Salidas del programa MAR1- Ejemplo: resultados de la 5ta. Simulación.

Cuantitativamente, el ajuste a la distribución Gamma es el más conveniente, con base al análisis de la raíz del menor error medio cuadrático (RMEC =

11.03) y al criterio de Schultz (D = 15.44, suficiente) (Tabla 2).

**Tabla 2.** Estadísticos principales de las series observadas y simuladas con MAR1.

Estadístico	Q obs.	Q sim. D. Normal*	Q sim. D. Log-normal*	Q sim. D. Gamma*
Promedio	25.91	26.12	25.18	26.28
Desviación Est.	10.48	3.58	4.69	3.43
Varianza	109.78	12.80	22.01	11.74
Máximo	54.87	35.04	35.13	33.57
Mínimo	4.18	16.90	0.00	19.74
n	72	72	72	72
D (Schultz)		15.89	16.95	15.44
RMEC		11.11	11.80	11.03

\* Caudales promedio de las 10 simulaciones realizadas.

La ecuación de generación de descargas encontrada para el año promedio en la estación Letrayoc en el río Pisco sirve como técnica hidrológica para extender datos anuales, tal como señala (Alfaro & Soley, 2009) para datos meteorológicos en general, quedando definida según la Fórmula 12.

$$Y_t = 25.91 + 0.05 (Y_{t-1} - 25.91) + \varepsilon_t$$

**Fórmula 12.** Generación de descargas para el año promedio.

Se calibró y validó el modelo autorregresivo de orden 1 del programa MAR1, probándose la independencia y normalidad de los errores a través de la prueba no paramétrica de Kolmogorov Smirnov, con un delta tabular de 0.1603 a un nivel de significancia del 5%.

Respecto de la capacidad de almacenamiento de las aguas del río Pisco (disponibilidad hídrica superficial como Servicio Ecosistémico Hidrológico de aprovisionamiento), se obtuvo una capacidad de almacenamiento simulada de 104.3 Hm<sup>3</sup> que es menor a la capacidad observada de 117.7 Hm<sup>3</sup> (Tabla 3), que evidencia la tendencia a la disminución de los caudales (pendiente negativa de la recta de la Figura 1). Siendo que los recursos hídricos pueden ser considerados como “productos del ecosistema”, es necesaria su protección y gestión sostenible, para proteger y salvaguardar los recursos hídricos (Bussetini, 2018).

Por último, las herramientas de programación como MATLAB R2016a permiten realizar operaciones matemáticas diversas con relativa facilidad cuyos resultados, acompañados de gráficos, le otorgan una ventaja adicional en el uso de modelos (Moreno & Salazar, 2008).

**Tabla 3.** Estadísticos de sequía- Resultados del programa SAMS.

Estadístico	Histórica	Generada
Sequía más larga (años)	10	6.3
Déficit máximo (%)	95.88	53.33
Superávit más largo (años)	7	5.8
Excedente máximo (Hm <sup>3</sup> )	38.4	57.25
Capacidad de almacenamiento (Hm <sup>3</sup> )	117.7	104.3
Coefficiente de Hurst	0.677	0.6382

### Conclusiones

Se concluye que la utilización de los modelos estocásticos en hidrología aplicados a descargas medias, anuales o mensuales, producen resultados satisfactorios, verificados, en este caso, con la raíz del menor error medio cuadrático (RMEC) como estadístico de bondad de ajuste de modelos. Estos modelos podrían ser utilizados para simular otras condiciones en los ríos, además de ser usados para explicar el cambio climático, como, por ejemplo, los efectos El Niño frente a la costa peruana aplicados a series temporales de temperatura superficial del mar; sin embargo, su uso mayoritario es en la evaluación de los recursos hídricos con fines de gestión. Se ha comprobado que en la cuenca del río Pisco los Servicios Ecosistémicos Hidrológicos (SEH) de aprovisionamiento de agua se están reduciendo, probablemente ante las modificaciones en el clima y un uso descontrolado.

El programa MAR1 en su primera versión puede ser utilizado para modelar datos de descargas mensuales de los ríos de nuestro país con el propósito de servir para la cuantificación de la disponibilidad hídrica superficial de los mismos.

### Agradecimientos

Los autores expresamos nuestro sincero agradecimiento a la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga y al Programa de Doctorado en Recursos Hídricos de la Universidad Nacional Agraria La Molina por permitirnos la oportunidad de ejercer la docencia e investigación.

### Literatura citada

Alcántara A., Montalvo N., Mejía A. & Ingol E. 2014. Validación de modelos hidrológicos lluvia-escorrentía para su aplicación a la cabecera de cuenca del río Jequetepeque. *Revista del Instituto de Investigación (RIIGEO) de la Facultad de Ingeniería Geológica, Minera, Metalúrgica y Geográfica (FIGMMG) – UNMSM*, 17(33): 7-17. <https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/ii-geo/article/view/11492>.

Alcántara F.A. 2015. Modelo de geoformaciones cóncavas para recargas de agua subterránea en cabeceras de la cuenca del río Jequetepeque, Cajamarca. Tesis de Doctorado en Recursos Hídricos. Universidad Nacional Agraria La Molina, Lima, Perú. URI: <http://repositorio.lamolina.edu.pe/handle/UNALM/2156>.

Alfaro E.J. & Soley F.J. 2009. Descripción de dos métodos de rellenado de datos ausentes en series de tiempo meteorológicas. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 16(1): 60-75. DOI: <https://doi.org/10.15517/rmta.v16i1.1419>.

Aliaga S.V. 1985. Hidrología estadística. Editorial UNMSM. Lima.

Arellano J.L.L. & Ruiz L.E. 2018. Evaluación y tendencias de los servicios ecosistémicos hidrológicos de la cuenca del río Zanatenco, Chiapas. *Investigaciones geográficas*, (95) 0-0. DOI: <https://doi.org/10.14350/ig.59467>.

Bussettini M. 2018. Environmental Flows in Sustainable Integrated Water Resources Management. *Bulletin (Special issue on Water)*, 67 (1): 65-66. [https://library.wmo.int/doc\\_num.php?explnum\\_id=4448](https://library.wmo.int/doc_num.php?explnum_id=4448).

Del Aguila S. 2001. Modelamiento estocástico de las descargas medias del río Santa – Ancash. Tesis de Maestría en Recursos Hídricos. Universidad Nacional Agraria La Molina, Lima, Perú.

INRENA. 2003. Evaluación y ordenamiento de los recursos hídricos de la cuenca del río Pisco.

Kummu M., Guillaume J.H.A., Moel H. de, Eisner S., Flörke M., Porkka M., Siebert S., Veldkamp T.I.E. & Ward P.J. 2016. The world's road to water scarcity: shortage and stress in the 20th century and pathways towards sustainability. *Scientific Reports*, 6, 38495. DOI: <https://doi.org/10.1038/srep38495>.

Loucks D.P., Beek E. van, Stedinger J.R., Dijkman J.P.M. & Villars M.T. 2005. *Water Resources Systems Planning and Management: An Introduction to Methods, Models and Applications*. UNESCO PUBLISHING. Enlace permanente: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000143430.locale=es>.

Maidment D.R. 1993. *Handbook of hydrology*. McGraw-Hill.

McDonald R.I., Weber K., Padowski J., Flörke M., Schneider C., Green P.A., Gleeson T., Eckman S., Lehner B., Balk D., Boucher T., Grill G. & Montgomery M. 2014. Water on an urban planet: Urbanization and the reach of urban water infrastructure. *Global Environmental Change*, 27: 96-105. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.gloenvcha.2014.04.022>.

Mejía A. 2017. *Probabilidad y Estadística en Hidrología*. Lima, Perú: Fondo Editorial UNALM.

Moreno J.M. & Salazar J.E. 2008. Modelo Autorregresivo Multivariado basado en Regímenes para la Generación de Series Hidrológicas. *DYNA*, 76(157): 101-108. <https://revistas.unal.edu.co/index.php/dyna/article/view/9557>.

Obregón E. 1993. Modelos en series de tiempo aplicado a descargas medias mensuales del río Pisco. Tesis para optar el Título de Ingeniero Agrícola. Universidad Nacional Agraria La Molina, Lima, Perú.

- Quispe E.L.F., Delgado C.A.S. & Condori E.F. 2017. Predicción de caudales diarios de la estación hidrométrica Tumilaca aplicando modelos estocásticos autorregresivos. *Ciencia & Desarrollo*, (19): 68-73. DOI: <https://doi.org/10.33326/26176033.2015.19.489>.
- Roldán J. 1994. Tendencias actuales en el modelado de la precipitación diaria. *Ingeniería del agua*, 1(1): 89-100. DOI: <https://doi.org/10.4995/ia.1994.2633>.
- Salas J.D. & Yevjevich V.M. 1972. Stochastic structure of water use time series. *Hydrology papers*, no. 52. Colorado State University. <http://hdl.handle.net/10217/61535>.
- Salas J.D., Delleur J.W., Yevjevich V. & Lane W.L. 1997. Applied modeling of hydrologic time series. Water Resources Publication. Littleton, Colorado, U.S.A.
- Tealab A. 2018. Time series forecasting using artificial neural networks methodologies: A systematic review. *Future Computing and Informatics Journal*, 3(2): 334-340. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fcij.2018.10.003>.
- Thomas H. & Fiering M. 1962. Mathematical synthesis of streamflow sequences for the analysis of river basins by simulation. In: Mass et al. *Design of Water Resource Systems*. Harvard University Press, Cambridge. 459-493.
- Wan H., Zhang X. & Barrow E.M. 2005. Stochastic modelling of daily precipitation for Canada. *Atmosphere-Ocean*, 43(1): 23-32. DOI: <https://doi.org/10.3137/ao.430102>.

### Apéndice 1. Código MATLAB R2016a de ajuste al modelo autorregresivo de orden 1 y distribuciones de probabilidad Normal, Log-normal y Gamma: MODELO MAR1.

```
% MODELO AUTOREGRESIVO DE ORDEN 1
% RIO PISCO - ESTACION LETRAYOC - PROMEDIO ANUAL
% PERIODO DE REGISTRO 1933-2004 (72 AÑOS)
clear
% #####
clear
t=xlsread('pisco.xlsx','caudal','a14:a85');
x=xlsread('pisco.xlsx','caudal','n14:n85');
n=length(x);
m=round(0.25*n);
N=72;
xmax=max(x);
xmin=min(x);
% #####
% DETERMINACIÓN DEL CORRELOGRAMA
for k=1:m
    if k==1
        for i=1:n
            x1(i)=x(i);
            x2(i)=x(i);
        end
    else
        for i=1:n-k+1
            x1(i)=x(i);
        end
        for i=k:n
            x2(i-k+1)=x(i);
        end
    end
    rr=cov(x1,x2)/(var(x1).*var(x2)).^0.5;
    r(k)=rr(2,1);
    % Límites de Confianza 1
    LS(k)=(1/(n-k))*(-1+1.96*(n-k-1)^0.5);
    LI(k)=(1/(n-k))*(-1-1.96*(n-k-1)^0.5);
    % Límites de Confianza 2
    LS1(k)=(-1+1.96*(n-2)^0.5)/(n-1);
    LI1(k)=(-1-1.96*(n-2)^0.5)/(n-1);
    x1=zeros;
    x2=zeros;
end
r;
k=0:m-1;
kk=zeros(1,m);
plot(k,r,k,LS,k,LI,k,LS1,k,LI1);
% #####
% MODELO AUTOREGRESIVO DE PRIMER ORDEN CON DISTRIBUCIÓN NORMAL
xm=mean(x);
sx=std(x);
r1=r(2); % coeficiente de autocorrelación de orden 1
%N=100;
t1=1:n;
t2=1:N;
```

```

X(1)=x(1);
for i=1:N-1
    X(i+1)=xm+r1*(X(i)-xm)+randn*sx*(1-r1^2)^0.5;
    % CALIBRACION
    if X(i+1)<xmin
        X(i+1)=xmin;
    end
    if X(i+1)>xmax
        X(i+1)=xmax;
    end
    % FIN DE LA CALIBRACION
end
X;
% #####
% MODELO AUTORREGRESIVO DE PRIMER ORDEN CON DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL
ym=mean(log(x));
sy=std(log(x));
r1=r(2); % coeficiente de autocorrelación de orden 1
%N=100;
t1=1:n;
t2=1:N;
Y(1)=log(x(1));
for i=1:N-1
    Y(i+1)=ym+r1*(Y(i)-ym)+randn*sy*(1-r1^2)^0.5;
    X1(i+1)=exp(Y(i+1));
    % CALIBRACION
    if X1(i+1)>xmax
        X1(i+1)=xmax;
    end
    % FIN DE LA CALIBRACION
end
Y;
X1;
% #####
% MODELO AUTORREGRESIVO DE PRIMER ORDEN CON DISTRIBUCIÓN GAMMA
xm=mean(x);
sx=std(x);
cx=skewness(x,0);
r1=r(2); % coeficiente de autocorrelación de orden 1
ce=(1-r1^3)*cx/(1-r1^2)^1.5;
r1=r(2); % coeficiente de autocorrelación de orden 1
%N=100;
t1=1:n;
t2=1:N;
X2(1)=x(1);
for i=1:N-1
    ee=(2/ce)*(1+(ce*randn/6)-(ce^2/36))^3-2/ce;
    X2(i+1)=xm+r1*(X(i)-xm)+ee*sx*(1-r1^2)^0.5;
    % CALIBRACION
    if X2(i+1)<xmin
        X2(i+1)=xmin;
    end
    if X2(i+1)>xmax
        X2(i+1)=xmax;
    end
    % FIN DE LA CALIBRACION
end
X2;
% #####
subplot(2,2,1)
plot(k,r,k,LS,k,LI,k,kk,k,LS1,k,LI1);
grid on;
title('CORRELOGRAMA')
xlabel('Desfase k')
ylabel('Coef. aut. r')
%legend('Qmax','LI','LS','Datos','Location','NorthWest');
hold on
subplot(2,2,2)
plot(t1,x,t2,X);
title('DISTRIBUCIÓN NORMAL')
xlabel('Tiempo cronológico')
ylabel('Q (m3/s)')
%legend('Qmax','LI','LS','Datos','Location','NorthWest');
subplot(2,2,3)

```



```
plot(t1,x,t2,X1);
title('DISTRIBUCIÓN LOG NORMAL')
xlabel('Tiempo cronológico')
ylabel('Q (m3/s)')
%legend('Qmax','LI','LS','Datos','Location','NorthWest');
subplot(2,2,4)
plot(t1,x,t2,X2);
title('DISTRIBUCIÓN GAMMA')
xlabel('Tiempo cronológico')
ylabel('Q (m3/s)')
%legend('Qmax','LI','LS','Datos','Location','NorthWest');
```

<sup>1</sup> Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga (UNSCH). Av. Independencia s/n Ayacucho, Perú. Programa de Doctorado en Recursos Hídricos de la Universidad Nacional Agraria La Molina (UNALM). Av. La Molina s/n, Lima 12, Perú. Autor de correspondencia: sandra.delaguila@unsch.edu.pe.

<sup>2</sup> Programa de Doctorado en Recursos Hídricos de la Universidad Nacional Agraria La Molina (UNALM). Av. La Molina s/n, Lima 12, Perú. jabel@lamolina.edu.pe.